Concours Blanc (4h)

Réduction-Intégration

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} .$$

0.1 **Première méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

On considère les matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire ses valeurs propres.

0.1.2 Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.3 Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit matriciel $D = P^{-1}AP$.

0.1.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis en déduire les expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

0.1.5 Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

0.1.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_o, v_0 et $n \in \mathbb{N}$.

0.2 **Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

0.2.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

0.2.2 Montrer que l'ensemble $F = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+} = 2x_{n+1} + x_n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles, puis en donner la dimension et une base.

0.2.3 En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 2

1.1 **Une inégalité utile**

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1 Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = t\varphi'(0) + \displaystyle\int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.2 En déduire que $\varphi'(o) = -\displaystyle\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.3 Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $\varphi(t) = -\displaystyle\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.4 Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $0 \leq \min(s,t) - st < \dfrac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall t \in [0,1],\ \ 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}.$$

1.2

1.2.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t$.

Exercice 3

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

1. a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = 1$.

   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x^n e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n = n!$.

Problème

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par,

$$M_a = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & -2a \\ -1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que le polynôme caractéristique de la matrice de M_a est donné par $\chi_{M_a} = \det(XI_3 - M_a)$, I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie 1
Calcul des puissances de la matrice M_a

1. a) Vérifier que le polynôme caractéristique de M_a est $\chi_{M_a} = (X-1)(X-a+1)(X-a)$.
   b) En déduire le déterminant de M_a.
   c) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice M_a est inversible.

2. a) Déterminer les valeurs propres de f_a.
   b) Déterminer suivant les valeurs de a, la multiplicité de chaque valeur propre de f_a.

3. Posons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = -2e_1 + e_2 \end{cases}$.
   a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   b) Vérifier que e'_1, e'_2 et e'_3 sont des vecteurs propres de f_a.
   c) Prouver que la matrice M_a est diagonalisable.
   d) Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   e) Donner une matrice diagonale D_a vérifiant $M_a = PD_aP^{-1}$.
   f) Dans le cas où M_a est inversible, déterminer l'expression de M_a^{-1} sous la forme d'un tableau.

Partie 2
Commutant de la matrice M_a

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(A) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AN = NA\}$ le commutant de A.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $N \in \mathcal{C}(A)$ et N inversible, alors $N^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.

3. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $N \in \mathcal{C}(M_a)$ si, et seulement si, $P^{-1}NP \in \mathcal{C}(D_a)$.
   b) En déduire que les sous espaces vectoriels $\mathcal{C}(M_a)$ et $\mathcal{C}(D_a)$ ont même dimension.

4. On suppose que $a \notin \{1, 2\}$.
   a) Déterminer $\mathcal{C}(D_a)$.
   b) En déduire $\mathcal{C}(M_a)$ et préciser sa dimension.

5. Déterminer $\mathcal{C}(D_1)$, $\mathcal{C}(D_2)$ et préciser les dimensions de $\mathcal{C}(M_1)$ et $\mathcal{C}(M_2)$.

Corrigé

Exercice 1 (CNC 2022)

0.1 **Première méthode de calcul des termes des suites** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.1.1 $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det A = X^2 - 2X - 1$, d'où $\operatorname{Sp}(A) = \left\{ 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} \right\}$.

0.1.2 Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.3 $\det P = 2\sqrt{2} \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

0.1.4 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où:

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] & \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}.$$

0.1.5 On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, puis par récurrence $X_n = A^nX_0$.

0.1.6 Puisque $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, alors la première ligne donne la valeur de u_n et la deuxième ligne donne la valeur de v_n, on trouve:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}u_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]v_0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]u_0 + \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}v_0.$$

0.2 Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2v_{n+1} \\ &= u_{n+1} + 2u_n + 2v_n \\ &= u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1} - u_n \\ &= 2u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

De même, on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

0.2.2 F contient la suite de terme général nul et stable par toute combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_0, y_0) \end{array}.$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en effet, il est clair que φ est linéaire, de plus pour chaque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une seule suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $x_0 = a$ et $x_1 = b$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Il suffit alors de connaître une famille libre de deux suites de F, l'espace F est alors engendré par cette famille libre.

L'idée est alors de rechercher des suites géométriques vérifiant la récurrence de F. C'est-à-dire chercher des scalaires r tels que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Ceci est équivaut à résoudre l'équation du second degré $r^2 - 2r - 1 = 0$. Soient $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ les deux racines distinctes. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F et forment une base de F:

$$F = \mathrm{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

0.2.3 D'après ce qui précède, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que, pour tout entier n, on a:

$$u_n = \lambda_1(1+\sqrt{2})^n + \lambda_2(1-\sqrt{2})^n$$

et

$$v_n = \lambda_3(1+\sqrt{2})^n + \lambda_4(1-\sqrt{2})^n.$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = u_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4 = v_0 \\ \lambda_3 r_1 + \lambda_4 r_2 = v_1 \end{cases}.$$

Le premier système donne $\lambda_1 + \lambda_2 = u_0$ et $\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = u_1 - u_0 = u_0 + 2v_0 - u_0 = 2v_0$, donc on peut exprimer λ_1 et λ_2 en fonction de u_0 et v_0 et par conséquent u_n peut être exprimé en fonction de n, u_0 et v_0. Même chose pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (CNC 2022)

1.1 Une inégalité utile

1.1.1 La fonction φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, donc on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale sur l'intervalle $[0,t]$ où $t \in [0,1]$. On a:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$$

1.1.2 Il suffit de remplacer t par 1 dans la formule précédente.

1.1.3 Appliquons la relation de Chasles:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s &= \int_0^t (\min(s,t) - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s + \int_t^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t (s - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s + \int_t^1 (t - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^t (s-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s &= (1-t)\int_0^t s\varphi''(s)\mathrm{d}s \\
&= (1-t)\left(\left[s\varphi'(s)\right]_0^t - \int_0^t \varphi'(s)\mathrm{d}s\right) \\
&= (1-t)\left[t\varphi'(t) - \varphi(t)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_t^1 (t-st)\varphi''(t)\mathrm{d}s &= t\int_t^1 (1-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s \\
&= t\left(\left[(1-s)\varphi'(s)\right]_t^1 + \int_t^1 \varphi'(s)\mathrm{d}s\right) \\
&= -t\left[-(1-t)t\varphi'(t) + \varphi(t)\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(t)\mathrm{d}s &= (1-t)\left[t\varphi'(t) - \varphi(t)\right] - t\left[-(1-t)t\varphi'(t) + \varphi(t)\right] \\
&= -\varphi(t).
\end{aligned}$$

1.1.4 Pour $s \in [0,1]$ fixé, on pose $h(t) = \min(s,t) - st$. On a:

$$h(t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ s(1-t) & \text{si } s < t \leq 1 \end{cases}$$

Cette fonction h est positive sur $[0,1]$, croit sur $[0,s]$ et décroit sur $[s,1]$, donc $0 \leq h(t) \leq h(s) = s - s^2$. La fonction $s \mapsto s - s^2$ admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$ qui égal à $\dfrac{1}{4}$. D'où :

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2,\ \ 0 \leq \min(s,t) - st \leq \frac{1}{4}.$$

L'inégalité de la question 1.1.3 montre que $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, par inégalité triangulaire des intégrales:

$$0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}\int_0^1 -\varphi''(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\left(\varphi'(0) - \varphi'(1)\right).$$

1.2

1.2.1 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est continue sur $[2,+\infty[$, de plus, pour $x \geq 2$, on a:

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = -\left[\frac{1}{\ln t}\right]_2^x = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$$

Cette quantité admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$ converge et sa valeur vaut $\dfrac{1}{\ln 2}$.

Exercice 2 (CNC 2021)

1. (a) La fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $A > 0$:

$$\int_0^A e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1,$$

on en déduit que $\boxed{I_0 \text{ est une intégrale convergente}}$ et que $\boxed{I_0 = 1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $x^2\, x^n \mathrm{e}^{-x} = x^{n+2}\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, d'où

$$\boxed{x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question 1.b), $x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, de plus la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Sachant que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente (intégrale de Riemann avec exposant $2 > 1$), un théorème de comparaison sur les intégrales impropres assure que

$$\boxed{I_n \text{ est une intégrale convergente}}.$$

2. Soit A un réel positif. Les fonctions $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,A]$. La formule d'intégration par parties s'écrit:

$$\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Par suite

$$\boxed{\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

3. Soit n un entier naturel. On sait que $-A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. D'après le résultat trouvé en 1.(c), en faisant donc tendre A vers $+\infty$ dans la relation (1), on obtient que

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}.$$

4. Montrons par récurrence que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$ puisque $I_0 = 1 = 0!$. Supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $I_n = n!$. Alors

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!.$$

D'après le principe de récurrence, on déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}.$$

Problème (CNC 2021)

Partie 1

Calcul des puissances de la matrice M_a

1. (a)

$$\begin{aligned}
\chi_{M_a} &= \begin{vmatrix} X-(1+a) & -2 & 2a \\ 1 & X-(a-2) & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-(a-1) & -2 & 2a \\ -X+(a-1) & X-(a-2) & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-(a-1) & -2 & 2a \\ 0 & X-a & -2+2a \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= (X-(a-1))(X-a)(X-1)
\end{aligned}$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux.

(b) On sait que $\chi_{M_a}(0) = -\det(M_a)$ donc $\boxed{\det(M_a) = -a(a-1)}$.

(c) M_a est inversible ssi $\det(M_a) \neq 0$ donc M_a est inversible ssi $\boxed{a \neq 0 \text{ et } a \neq 1}$.

2. (a) Les valeurs propres de f_a sont exactement les racines de χ_{f_a} ou de χ_{M_a} à savoir: $1,\ a,\ a-1$.

(b) Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, les trois valeurs propres $1,\ a,\ a-1$ sont distinctes deux-à-deux, elles sont donc toutes simples. Si $a = 1$, f_a admet deux valeurs propres: 1 double et 0 simple. Si $a = 2$, f_a admet deux valeurs propres: 1 double et 2 simple.

3. (a) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ après avoir développé ce déterminant par rapport à sa troisième ligne.

Par suite $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(b) On a $\quad \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(e_1') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(e_2') = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(e_3') = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\, f_a = M_a$.

Par un calcul matriciel, on a:

- $M_a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f_a(e_1') = e_1'$.
- $M_a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -a+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f_a(e_2') = (a-1)e_2'$.
- $M_a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f_a(e_3') = ae_3'$.

Par suite e_1', e_2' et e_3' sont des vecteurs propres de f_a associés respectivement aux valeurs propres 1, $a-1$ et a.

(c) $\mathcal{B}'$ est une base de E formée par des vecteurs propres de f_a, donc f_a est diagonalisable et par suite $\boxed{M_a \text{ est diagonalisable}}$.

(d) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées des vecteurs e_1', e_2' et e_3' dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi $\boxed{P = \underset{\mathcal{B}}{\operatorname{mat}} \mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(e) D'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes, on a:

$$\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{mat}} f_a = P \left(\underset{\mathcal{B}'}{\operatorname{mat}} f_a \right) P^{-1},$$

ou encore $M_a = P D_a P^{-1}$ où $D_a = \underset{\mathcal{B}'}{\operatorname{mat}} f_a$. D'après 3.(b), on déduit que

$$\boxed{D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$$

(f) On suppose que M_a est inversible donc d'après 3.(b), $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Dans ce cas, $M_a^{-1} = P D_a^{-1} P^{-1}$ avec $D_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$. De plus, $\det P = -1$ d'après 1.(b) et $\operatorname{com} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

La formule $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\, {}^t(\operatorname{com} P)$ montre alors que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Par un calcul matriciel, on obtient:

$$\boxed{M_a^{-1} = \frac{1}{a(a-1)} \begin{pmatrix} a-2 & -2 & 2(a^2-2a+2) \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Partie 2

Commutant de la matrice M_a

1. • la matrice nulle 0 commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $0 \in \mathcal{C}(A)$.
   • Soient $N, M \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $AN = NA$ et $AM = MA$ et l'on a:

   $$A(\lambda N + M) = \lambda AN + AM = \lambda NA + MA = (\lambda N + M)A.$$

   Par suite $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $AN = NA$, alors en multipliant à droite et à gauche par N^{-1}, on a: $N^{-1}ANN^{-1} = N^{-1}NAN^{-1}$ et donc $N^{-1}A = AN^{-1}$ ainsi $\boxed{N^{-1} \in \mathcal{C}(A)}$.

3. (a) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a:

$$\begin{aligned} NM_a = M_aN &\iff NPD_aP^{-1} = PD_aP^{-1}N \qquad \text{d'après 3.(e) de la partie 1 .} \\ &\iff P^{-1}NPD_aP^{-1}P = P^{-1}PD_aP^{-1}NP \\ &\iff \left(P^{-1}NP\right)D_a = D_a\left(P^{-1}NP\right). \end{aligned}$$

Par suite $\boxed{N \in \mathcal{C}(M_a) \iff P^{-1}NP \in \mathcal{C}(D_a)}$.

(b) Considérons l'application $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ N & \longmapsto & P^{-1}NP \end{array}$

Il est clair que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ bijectif puisque pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation $P^{-1}NP = M$, d'inconne $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet une unique solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, à savoir $N = PMP^{-1}$, c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (appelé automorphisme intérieur de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). De plus, $\varphi(\mathcal{C}(M_a)) = \mathcal{C}(D_a)$ d'après le résultat de 3.(a), par suite

$$\boxed{\mathcal{C}(M_a) \text{ et } \mathcal{C}(D_a) \text{ ont la même dimension}}.$$

4. (a) Soit $N = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}(D_a) &\iff ND_a = D_aN \\ &\iff \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} n_{1,1} & (a-1)n_{1,2} & a\,n_{1,3} \\ n_{2,1} & (a-1)n_{2,2} & a\,n_{2,3} \\ n_{3,1} & (a-1)n_{3,2} & a\,n_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ (a-1)n_{2,1} & (a-1)n_{2,2} & (a-1)n_{2,3} \\ a\,n_{3,1} & a\,n_{3,2} & a\,n_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\iff \forall (i,j) \in [1,3],\ i \neq j \Rightarrow n_{i,j} = 0 \ \text{ puisque } \ a-1 \neq 1,\ a-1 \neq a \ \text{ et } \ a \neq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $\mathbb{D}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales, on déduit que $\boxed{\mathcal{C}(D_a) = \mathbb{D}_3(\mathbb{R})}$.

(b) En utilisant les résultats de 3.(a) et 4.(a), on obtient que

$$N \in \mathcal{C}(M_a) \iff \exists D \in \mathbb{D}_3(\mathbb{R}) :\ P^{-1}NP = D \iff \exists D \in \mathbb{D}_3(\mathbb{R}) :\ N = PDP^{-1}.$$

Par suite $\boxed{\mathcal{C}(M_a) = \{PDP^{-1} \mid D \in \mathbb{D}_3(\mathbb{R})\}}$ et $\boxed{\dim \mathcal{C}(M_a) = \dim \mathbb{D}_3(\mathbb{R}) = 3}$.

5. Notons par $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en utilisant le résultat obtenu en 4.(a), on a

- si $a = 1$, $N \in \mathcal{C}(M_1) \iff n_{1,2} = n_{2,1} = n_{2,3} = n_{3,2} = 0 \iff N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & n_{1,3} \\ 0 & n_{2,2} & 0 \\ n_{3,1} & 0 & n_{3,3} \end{pmatrix}$,

par suite $\boxed{\mathcal{C}(M_1) = \operatorname{vect}\left((E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant 3}\,; E_{1,3}; E_{3,1}\right)}$.

- si $a = 2$, $N \in \mathcal{C}(M_2) \iff n_{1,3} = n_{3,1} = n_{2,3} = n_{3,2} = 0 \iff N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & 0 \\ n_{2,1} & n_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,3} \end{pmatrix}$,

par suite $\boxed{\mathcal{C}(M_2) = \operatorname{vect}\left((E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant 3}\,; E_{1,2}; E_{2,1}\right)}$.

Notons que les familles qui engendrent $\mathcal{C}(M_1)$ et $\mathcal{C}(M_2)$ sont des sous-familles de la base canonique $\mathcal{E}$, elles forment donc deux bases de $\mathcal{C}(M_1)$ et $\mathcal{C}(M_2)$ respectivement. Par suite $\boxed{\dim \mathcal{C}(M_1) = \dim \mathcal{C}(M_2) = 5}$.