My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Contrôle (2h)

Séries Numériques

Équivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

Q21. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1}\rho_k\,.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Q23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Q24. En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)\,.$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\,.$$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u\,.$$

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q28. On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

Admise $\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$.

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q29. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.*

Corrigé

Q.19 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x : t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; les seuls problèmes d'intégrabilité sont en 0 et en $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $0 \leqslant f_x(t) \sim t^{x-1}$ donc, d'après les intégrales de Riemann et les théorèmes de comparaison sur les fonctions positives, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$, soit $x > 0$.
- Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées et, pour des raisons analogues, f_x est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt \text{ converge si et seulement si } x > 0.}$$

Q20. Soient $x > 0.$ et $(u : t \longmapsto t^x)$ et $(v : t \longmapsto -e^{-t})$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u'\,v$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_{]0,+\infty[} u\,v' = \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_{]0,+\infty[} u'\,v.$$

Or dans $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ on reconnait $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors :

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad \forall\, x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

La formule précédente donne alors par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Q21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.
On a $u_0 = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2}\, u_n = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)} u_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)}\right) u_0 = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\, u_0$$

ce qui est également vrai pour $n = 0$.
Or, le changement de variable $t = u^2$ donne :

$$u_0 = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}.}$$

Q22. Remarquons que puisque la fonction ln est continue sur $[1/2, +\infty[$, les ρ_k sont bien définis pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $n \geqslant 2$. La relation de Chasles et les propriétés du logarithme fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = \ln(n-1)! - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt.$$

La convention citée par l'énoncé dit que ce résultat reste valable pour $n = 1$; donc par **Q20.** :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\Gamma(n) = \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.}$$

Q23. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = t - k$ fournit :

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln t\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \ln(u+k)\, du = \int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du + \int_{0}^{1/2} \ln(u+k)\, du.$$

Puis en posant $w = -u$, on a $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du = \int_0^{1/2} \ln(k-w)\, dw.$ Finalement :

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \ln k - \int_0^{1/2} \ln(t+k)\, dt - \int_0^{1/2} \ln(k-t)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \left(2\ln k - \ln(t+k) - \ln(k-t)\right)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{k^2}{(k+t)(k-t)}\right)\, dt = \int_0^{1/2} -\ln\left(\frac{k^2-t^2}{k^2}\right)\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et} \quad \rho_k = \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\, dt.}$$

Q24. Par croissance de la fonction $(x \mapsto -\ln(1-x))$, on obtient :

$$0 \leqslant \rho_k \leqslant \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\, dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \quad \sim \frac{1}{8k^2}.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent de conclure que $\boxed{\text{la série } \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k \text{ converge.}}$

Q25. La fonction ln admet pour primitive $(t \longmapsto t\ln t - t)$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_{1/2}^{n-1/2} &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1.
\end{aligned}$$

Or $\quad \left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2n} \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) = -\dfrac{1}{2}. \quad$ Donc :

$$\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t \, dt = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + \circ(1).$$

D'après **Q24.**, il existe un réel ℓ tel que $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ell + \circ(1) \quad$ donc, d'après **Q22.** :

$$\boxed{\exists\, c \in \mathbb{R} \ / \ \ln \Gamma(n) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + \circ(1).}$$

On en déduit que

$$\Gamma(n) = \exp\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + \circ(1)\right) = n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}\, e^{c}\, e^{\circ(1)}.$$

Comme $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\circ(1)} = 1, \quad$ on obtient bien

$$\boxed{\Gamma(n) \underset{+\infty}{\sim} e^{c}\, n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}.}$$

Q26. Pour $\quad x > 0 \quad$ et $\quad n \in \mathbb{N}^*, \quad$ on définit $\quad \Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$

En utilisant le changement de variable $\quad u = \dfrac{t}{n}, \quad$ on obtient :

$$\boxed{\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^n \, du.}$$

Q27. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathscr{H}_n$ suivante : $\boxed{\forall\, x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}.$

- Initialisation :

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma_1(x) = \int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)\, du = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{x\to 0}^{1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1^x\, 1!}{x(x+1)}.$$

  Cela prouve que $\mathscr{H}_1$ est vraie.

- Hérédité : supposons $\mathscr{H}_n$ vraie à un rang fixé n et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

  Prenons $x > 0$. $\quad$ On a $\quad \Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^{n+1}\, du.$

  On procède à une intégration par parties à l'aide de

$$\forall x \in]0,1], \quad \alpha(u) = (1-u)^{n+1}, \quad \alpha'(u) = -(n+1)(1-u)^n, \quad \beta'(u) = u^{x-1}, \quad \beta(u) = \frac{u^x}{x}.$$

  Comme $\quad x > 0, \quad \lim\limits_{u\to 0} \alpha(u)\beta(u) = 0 \quad$ et $\quad \alpha(1)\beta(1) = 0, \quad$ donc

$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x) &= (n+1)^x \int_0^1 (n+1)(1-u)^n \frac{u^x}{x}\, du = \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}} \\ &\underset{\mathscr{H}_n}{=} \frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)} \\ &= \frac{(n+1)^x\ (n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

- On a bien montré le résultat par récurrence.

Q28. Désignons par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

Pour $x>0$ fixé, on a : $\forall\, n\geqslant 1,\quad \Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur l'intervalle d'intégration $\mathbb{R}_+^*$.
- Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
  On fixe $t>0$. Alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall\, n \geqslant n_0,\quad 0<t<n.$
  Ainsi $f_n(t) = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right) t^{x-1} = \exp\left(n\left(-\dfrac{t}{n}+\circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) t^{x-1} = \exp\left(-t+\circ(1)\right) t^{x-1}$
  et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\, t^{x-1}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction $f : t \longmapsto e^{-t}\, t^{x-1}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Domination : Par concavité de ln, on a $\forall\, u>-1,\quad \ln(1+u)\leqslant u,$ et par croissance de l'exponentielle :

$$\forall\, t\in]0,n[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}\, e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant t^{x-1}e^{-t}$$

  et l'inégalité reste vraie pour $t\geqslant n$. Donc

$$\forall\, t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}e^{-t} = f(t)$$

  et f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque $\Gamma(x)$ existe.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt = \Gamma(x).}$$

La question **Q27.** fournit :

$$\boxed{\forall\, x>0,\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\; n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.}$$

Q29. Fixons $x>0$. Une récurrence utilisant le résultat de **Q20.** montre que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x)$$

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} = \frac{x(x+1)\ldots(x+n)\Gamma(x)}{(x+n)\;(n-1)!\; n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)\Gamma(x)}{n!\; n^x}$$

On déduit alors de **Q28.** que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} = 1 \quad\text{soit}\quad \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\; n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.}$$

Avec $\quad x=\dfrac{1}{2}, \quad$ on obtient $\quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) \sim \Gamma(n)\ \sqrt{n}. \quad$ Puis **Q21.** fournit $\quad \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\,\sqrt{\pi} \sim \Gamma(n)\ \sqrt{n}.$
Mais d'après **Q20.**, $\quad (2n)! = \Gamma(2n+1) \quad$ et $\quad n! = n\Gamma(n). \quad$ Donc $\quad \Gamma(2n+1)\,\sqrt{\pi} \sim n\,\Gamma^2(n)\,\sqrt{n}\,2^{2n}.$
On utilise ensuite **Q25.** sur $\Gamma(2n+1)$ et $\Gamma^2(n)$ et on arrive à

$$e^c \sim \frac{(2n+1)^{2n}\,\sqrt{2}\,e^{-1}\,\sqrt{\pi}}{(2n)^{2n}} \sim \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} e^{-1}\,\sqrt{2\pi}.$$

Or $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = e \quad$ donc