Contrôle (2h)
Séries Entieres

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$ et $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$. On considère la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)...(t-n+1)\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\mathrm{d}t.$$

Le problème a pour objectif de déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, puis de calculer sa somme sur un intervalle ouvert de convergence et en fin d'étudier son comportement aux bornes de cet intervalle.

1ère Partie
Quelques résultats préliminaires

1.1 Une inégalité utile

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1 Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = t\varphi'(0) + \displaystyle\int_0^t (t-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.2 En déduire que $\varphi'(o) = -\displaystyle\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.3 Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $\varphi(t) = -\displaystyle\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)\mathrm{d}s$.

1.1.4 Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $0 \leq \min(s,t) - st < \dfrac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}.$$

1.2 Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique

1.2.1 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t$.

1.2.2 En déduire que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

1.3 Formule du binôme généralisée

Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors $(1+x)^N = \sum\limits_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n$; c'est la formule du binôme de Newton. L'objectif de cette section est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel.

Pour cela, on considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par:

$$\forall x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha.$$

1.3.1 Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \tag{1}$$

1.3.2 On se propose dans cette sous section de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est une solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n$..

(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

(iii) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

1.3.3 Montres soigneusement que pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

2ème Partie

Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

On rappelle que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par:

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\, b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)...(t-n+1)\mathrm{d}t = \int_0^1 \binom{t}{n}\mathrm{d}t.$$

2.1 Vérifier que, pour tour $t \in [0, 1]$ et tout entier naturel n, $\left|\binom{t}{n}\right| \leq 1$.

2.2 En déduire que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ vérifie $R_1 \geq 1$,

2.3 Soit $x \in]-1, 1[$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0, 1]$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N},\;\; \forall t \in [0,1],\;\; u_n(t) = \binom{t}{n} x^n.$$

2.3.1 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$.

2.3.2 En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[,\;\; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}t = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

2.4 On cherche ici à montrer que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ vaut 1.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $R_1 > 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $x \in]-R_1, R_1[$.

2.4.1 Soit $x \in]0, 2[$. Justifier que $f(x-1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln x}$.

2.4.2 Trouver une contradiction et conclure.