Devoir Maison

Calcul Différentiel

Exercice 16
Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

c) Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$$

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la **Partie A**. Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire de la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 17

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. *a)* Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. *a)* Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$.

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1,\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

5. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

6. *a)* Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ?
Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 18

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + \mathrm{e}^y$$

1. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.

b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a,\ln(a))$ et $(b,\ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question *2.*

2. *a)* Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a,\ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1\,\lambda_2 & = & a-1 \end{array} \right.$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a,\ln(a))$?

3. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b,\ln(b))$?

Exercice 19 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application.
Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$.
On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

a) Démontrer : $\exists C \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in E \times E,\ B(x,y) \leqslant C\ \|x\|_\infty\ \|y\|_\infty$.

b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 21 *(d'après* `CCINP 2021 - PSI`*)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

a) arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$.

b) arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.

La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$$

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v)$.
Puis, calculer pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$.

4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \geqslant 3r^2 \left(\dfrac{1}{2} - 2r\right)$.
Que peut-on en conclure ?

5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Exercice 22 *(d'après* `CCINP 2021 - MP`*)*

1. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire :

$$\forall (a,b,c) \in\ ]0,+\infty[^3,\ \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

2. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Exercice 23 *(d'après* `CCINP 2020 - PC`*)*

On se donne un entier $n \geqslant 2$.

On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n),\ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

On considère alors l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\ x_i\, x_j \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}\ x_i\, x_j\end{aligned}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & si\ i = j \\ a_{i,j}/2 & si\ i < j \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2,\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

2. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.

3. Justifier que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur la boule B_2 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte définie par $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.

5. Vérifier que la plus grande valeur propre de la matrice M_f est égale au maximum de la fonction f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.

On considère $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

6. Montrer : $f(x) = X^T M_f X$.

7. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$.

On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

9. On suppose : $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
Montrer : $\lambda_1 \leqslant Y^T D Y \leqslant \lambda_n$ et en déduire : $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

10. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

11. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n,\ f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2\, x_i x_j$$

12. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 24 *(d'après* `CCINP 2022 - MP - oraux`*)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Prouver : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}\,(x^2+y^2)$.

2. ***a)*** Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Dans cette question, on suppose : $\alpha = 0$.

a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 25 *(d'après* `CCINP 2010 - MP`*)*
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcccccl} f & : & \mathbb{R} & \times & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x & , & y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ que l'on déterminera.

2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.