My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Intégration

Exercice 1 : CNC 2021

On se propose de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(-\ln u)e^{-u}du$.

On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$I_{n,k}=\int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k du \;\text{ et } I_n=I_{n,n}$$

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et k,

$$I_{n,k}=I_{n,k-1}+\int_0^n\left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1}du$$

2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k,

$$\frac{k+1}{k}I_{n,k}=I_{n,k-1}-\frac{n}{k(k+1)}$$

3. On pose pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k, $J_{n,k}=(k+1)I_{n,k}$.

   a) Déterminer pour tous entiers naturels non nuls n et k, une relation entre $J_{n,k}$ et $J_{n,k-1}$.

   b) En déduire pour tout entier naturel non nul n, I_n en fonction de n et u_n.

Exercice 2 : CCP 2022

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t.$$

Q 1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \qquad \text{et :} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q 5** que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge et donner sa limite.

Q 7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

Exercice 1 (CNC 2021)

1. Justifions tout d'abord l'existence de l'intégrale $I_{n,k}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
La fonction $u \longmapsto \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^k$ est continue sur l'intervalle $]0,n]$. De plus, elle est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction ln qui garde un signe constant et intégrable sur $]0,1]$. Par suite elle est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,n]$, ce qui justifie l'existence de $I_{n,k}$. En outre, si $k \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} \mathrm{d}u + \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{I_{n,k} = I_{n,k-1} + \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} \mathrm{d}u} \qquad (10)$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Effectuons une intégration par parties sur l'intégrale qui figure dans la formule (10).
   - Les fonctions $\alpha\colon u \longmapsto u\ln(u)$ et $\beta\colon u \longmapsto \frac{1}{k}\left(1-\frac{u}{n}\right)^k$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,n]$,
   - $\alpha(u)\beta(u) = \frac{1}{k}(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^k \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ et $\alpha(n)\beta(n) = 0$, donc le crochet $[\alpha(u)\beta(u)]_0^n$ est nul.

   Le théorème d'intégration par parties (cas de convergence) assure que:

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(\frac{-1}{n}\right)(u\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} \mathrm{d}u &= [\alpha(u)\beta(u)]_0^n - \frac{1}{k}\int_0^n (1+\ln(u))\left(1-\frac{u}{n}\right)^k \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{k}I_{n,k} - \frac{1}{k}\int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^k \mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{k}I_{n,k} - \frac{1}{k}\left[\frac{-n}{k+1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n \\ &= -\frac{1}{k}I_{n,k} - \frac{n}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

   D'après le résultat de 1., il s'en suit que $I_{n,k} - I_{n,k-1} = -\frac{1}{k}I_{n,k} - \frac{n}{k(k+1)}$. D'où

$$\boxed{\frac{k+1}{k}I_{n,k} = I_{n,k-1} - \frac{n}{k(k+1)}}$$

3. (a) Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Le résultat de la question 2. se réécrit ainsi:

$$(k+1)I_{n,k} = kI_{n,k-1} - \frac{n}{k+1},$$

   d'où

$$\boxed{J_{n,k} = J_{n,k-1} - \frac{n}{k+1}}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant la dernière relation trouvée de $k=1$ à n, on obtient par télescopage:

$$J_{n,n} = J_{n,0} - n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = J_{n,0} - n\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = J_{n,0} - n\left(H_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

   Or, $J_{n,0} = I_{n,0} = \int_0^n \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_0^n = n\ln(n) - n$ puisque $u\ln(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Ainsi

$$J_{n,n} = n\ln(n) - n - nH_n + n - \frac{n}{n+1} = -nu_n - \frac{n}{n+1}.$$

   En divisant par $n+1$, on obtient donc $\boxed{I_n = -\frac{n}{n+1}u_n - \frac{n}{(n+1)^2}}$.

Exercice 1 (CCINP 2022)

Q 1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $1-t^2 \in [0,1]$. On en déduit que l'application $x \mapsto (1-t^2)^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$; comme $\frac{m+1}{2} \geqslant \frac{m}{2}$, on en déduit :

$$\forall t \in [0,1], \quad \left(1-t^2\right)^{\frac{m+1}{2}} \leqslant \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

et donc, par croissance de l'intégrale :

$$I_{m+1} \leqslant I_m,$$

ce qui démontre que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{m+2} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m+2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties cette dernière intégrale :

- en dérivant l'application $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,1]$ et de dérivée $t \mapsto -2t\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-t^2)^{\frac{m}{2}}$;
- en intégrant l'application $t \mapsto 1$, qui est continue sur $[0,1]$, et dont une primitive est $t \mapsto t$.

On a alors :

$$I_{m+2} = \left[t\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2t^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t$$

Comme $\frac{m}{2}+1 \geqslant 1 > 0$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$ est nulle en 1. Le terme entre crochets s'annule donc, et on a :

$$\begin{aligned} I_{m+2} = (m+2)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t &= (m+2)\int_0^1 \left((t^2-1)+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t \\ &= -(m+2)\left[\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t\right] \\ &= -(m+2)I_{m+2} + (m+1)I_m. \end{aligned}$$

On en déduit : $(m+3)I_{m+2} = (m+2)I_m$, puis :

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. Nous allons démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\mathrm{P}_n : \text{« } I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \text{ et : } I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \text{ »}$$

par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a par un calcul direct :

$$I_{2\times 1} = I_2 = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right) \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

tandis que, par définition des $a_{k,n}$:

$$\frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\times 3}\cdot\frac{2^3}{\sqrt{2}\binom{2}{1}} = \frac{2}{3},$$

donc : $I_{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}}$. Pour le calcul de :

$$I_{2\times 1-1} = I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

une stratégie (qui n'est pas la seule : on peut aussi astucieusement intégrer par parties) est d'effectuer le changement de variable $\theta = \arcsin(t)$ (on l'a choisi pour avoir : $1-t^2 = 1-\sin(\theta)^2 = (\cos(\theta))^2$). Il est licite parce que l'arc sinus définit une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,1[$, à valeurs dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, et donc :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \\ = \left[\frac{\theta+\sin(2\theta)/2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

tandis que :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^3}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{4},$$

donc : $I_{2\times 1-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1}$. On a donc montré :

$$I_{2\times 1} = \frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}}, \quad I_{2\times 1-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1},$$

d'où P_1. On a initialisé la propriété à démontrer.
À présent, soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. D'après la question précédente (avec $m = 2n$), on a :

$$I_{2(n+1)} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}.$$

On aimerait montrer que c'est égal à $\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}$. Cela nécessite préalablement de comprendre comment faire apparaître $a_{n+1,n+1}$, alors que nous avons $a_{n,n}$ ci-dessus. Trouvons donc une relation entre $a_{n+1,n+1}$ et $a_{n,n}$. Pour cela, remarquons que :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et donc :

$$a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{2^{2n+3}}{\sqrt{2(n+1)}}a_{n+1,n+1},$$

ou encore, après simplifications :

$$a_{n,n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}a_{n+1,n+1}, \tag{$*$}$$

donc, en reprenant le calcul de $I_{2(n+1)}$ ci-dessus :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\cancel{2}(n+1)}{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{2\cancel{n}} \cdot \cancel{(2n+1)}}{2\cancel{(2n+1)} \cdot \cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}a_{n+1,n+1}} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}.$$

Encore en utilisant la question précédente (cette fois avec $m = 2n-1$) et $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)-1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n-1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} &\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{2}(n+1)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\cancel{n}}} \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}}{\cancel{2n+1}} a_{n+1,n+1} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1}. \end{aligned}$$

On a donc montré, ayant supposé P_n :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}, \quad I_{2(n+1)-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1},$$

d'où P_{n+1}, ce qui achève l'hérédité. Par principe de récurrence, on a donc le résultat voulu pour tout entier $n \geqslant 1$.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a montré dans la première question que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante. Donc :

$$I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}.$$

En principe, il suffit de diviser par $I_{2n} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ pour avoir le résultat voulu, à condition de bien justifier que c'est une quantité strictement positive. C'est vrai par propriété de séparation de l'intégrale, étant donné que l'application $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I_{2n} > 0$, et diviser par I_{2n} donne :

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

Or, d'après la question **Q 2** : $\dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$, et d'après la question précédente :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \times \frac{2(2n+1)a_{n,n}}{\sqrt{2n}} = \frac{2(2n+1)\pi}{2n} \left(a_{n,n}\right)^2.$$

D'où le résultat voulu, en divisant par $\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} > 0$ dans l'encadrement ci-dessus :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. D'après l'encadrement de la question précédente, et le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 = 1$, et donc :

$$a_{n,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(ce qu'on pouvait aussi trouver grâce à la formule de Stirling). On a donc, pour tout n au voisinage de l'infini :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2 \cdot 2n} \cdot \sqrt{2\pi} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Remarque. Le changement de variable $t = \arcsin(\theta)$, déjà proposé dans la question **Q 2**, permet de démontrer qu'on a : $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^{2n+1} \mathrm{d}\theta$. On reconnaît les traditionnelles intégrales de Wallis, et l'équivalent asymptotique bien connu.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{n}$ dans l'intégrale $I_{2n} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$. Il est licite, parce que l'application $t \mapsto t\sqrt{n}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, et donc :

$$I_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} J_n,$$

donc :

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n},$$

et d'après la question **Q 5** :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où le résultat.