Équivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t\,.$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

Q21. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \; \mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \; \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k\,.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Q23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Q24. En déduire que $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)\,.$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}\,.$$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \mathrm{d}u\,.$$

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q28. On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0, n[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

Q29. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.*