PRÉPAS ELBILIA

PSI

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Devoir Maison
Matrices

Exercice 1 : CCINP 2023

Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a,b) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$.

Autrement dit :$P_{a,b}$(X)= det ($M(a,b$ - X. I)

On note I_n la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a,b) = b\mathrm{I}_n + aM(1,0).$$

Q 19. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ et déterminer la valeur propre associée à V. Autrement dit : M.V=c. V où v constante à déterminer

Q 20. Montrer que : $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q 21. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que : $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.

Q 22. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par : $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$.
Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$

Autrement dit : $Q_{a,b}\left(M(a,b)\right)$ =0

Q 23. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n.

Exercice 2 : e3a 2021

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \ \text{ et } \ \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. **Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.**
   (1.1) Soient $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ soit la fonction nulle.
   Démontrer que $a_{-1} = 0$.
   (1.2) Démontrer alors que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
   On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.
   (1.3) En déduire la dimension de E.
2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :
$$\forall x \in J, \quad g(x) = (1+x)f'(x).$$
   (2.1) Déterminer, pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.
   (2.2) Vérifier que u est un endomorphisme de E.
   (2.3) Déterminer le noyau et l'image de u.
   (2.4) Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.
   (2.5) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
3. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$.
4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.
   (4.1) On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)y'(t)$ nulle en zéro.
   Expliciter h_3.
   (4.2) En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, h_k la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$.
   Expliciter h_k.

Corrigé

Exercice 1 : CCINP 2023

Q 18. La matrice $M(a,b)$ est symétrique, réelle dans cette question puisqu'on suppose que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable.

Q 19. La somme des coefficients de chaque ligne égale $b+(n-1)a$. Un calcul direct montre donc que : $M(a,b)V = (b+(n-1)a)V$. Comme $V \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, on en déduit que c'est un vecteur propre de M, et que $b+(n-1)a$ est la valeur propre associée à V.

Q 20. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$P_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ x-(n-1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ x-(n-1) & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} \left(C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i\right)$$

$$= \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & x+1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \vdots \\ (L_n \leftarrow L_n - L_1) \end{array}$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire : il se calcule donc en faisant le produit des coefficients diagonaux. De là on déduit facilement : $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$. D'où le résultat.

Autre démonstration. On peut trouver ce polynôme caractéristique sans calcul, par un bon usage du théorème du rang. En effet, la matrice $M(1,0) + \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est évidemment de rang 1, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(M(1,0)+\mathrm{I}_n)) = n-1 > 0$. On en déduit que -1 est valeur propre, d'ordre de multiplicité exactement $n-1$ (comme $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, on sait par la question **Q 18** que $M(1,0)$ est diagonalisable, donc par le critère de diagonalisation on sait que les ordres de multiplicité des valeurs propres sont exactement égaux aux dimensions des sous-espaces propres associés). De plus, en appliquant la question précédente avec $(a,b) = (1,0)$, on observe que $n-1$ est valeur propre de $M(1,0)$. Cela fait n valeurs propres de $M(1,0)$ (en comptant les ordres de multiplicité), donc n racines de $P_{1,0}$. Comme il est de degré n, le compte est bon et on a : $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q 21. L'énoncé nous invite à remarquer que l'on a : $M(a,b) = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - M(a,b)) &= \det(x\mathrm{I}_n - b\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det((x-b)\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right), \end{aligned}$$

d'où : $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. On en déduit, grâce à la question précédente :

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = (X-b-(n-1)a)(X-b+a)^{n-1}.$$

On en déduit que les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+(n-1)a$ (qui est d'ordre de multiplicité 1) et $b-a$ (qui est d'ordre de multiplicité $n-1$).

On a bien $b-(n-1)a \neq b-a$, puisque l'égalité équivaut à $na = 0$, or on a supposé a non nul.

Q 22. La matrice $M(1,0)$ est diagonalisable par la question **Q 18** avec $(a,b) = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, donc par le critère polynomial de diagonalisation on sait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M(1,0))} (X-\lambda) = (X+1)(X-(n-1))$ est un polynôme annulateur de $M(1,0)$ (les valeurs propres de $M(1,0)$ sont $n-1$ et -1 d'après n'importe laquelle des deux questions précédentes). C'est-à-dire :

$$(M(1,0) + \mathrm{I}_n)(M(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Voyons comment en déduire que $Q_{a,b} = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$. On rappelle que l'on a : $M_{a,b} = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. Donc :

$$\begin{aligned}
Q_{a,b}(M_{a,b}) &= (M(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(M(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) \\
&= (b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) \\
&= (aM(1,0) + a\mathrm{I}_n)\,(aM(1,0) - (n-1)a\mathrm{I}_n) \\
&= a^2\,(M(1,0) + \mathrm{I}_n)\,(M(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) \\
&= 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})},
\end{aligned}$$

d'où le résultat : $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$. On va en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:

- si $a = 0$, alors $M(0,b) = b\mathrm{I}_n$, qui est diagonale donc diagonalisable;
- si $a \neq 0$, alors $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, scindé, et à racines simples parce que $b-a \neq b+(n-1)a$ (en effet $b-a = b+(n-1)a$ si et seulement si $na = 0$, si et seulement si $a = 0$, mais on a supposé le contraire), donc par le critère polynomial de diagonalisation $M(a,b)$ est diagonalisable.

D'où le résultat : $M(a,b)$ est diagonalisable.

Q 23. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$X^k = Q_{a,b}Q + R \qquad (*)$$

et $\deg(R) < \deg(Q_{a,b}) = 2$. Comme $\deg(R) \leqslant 1$, on peut écrire le reste ainsi : $R = \alpha X + \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant $(*)$ en les racines de $Q_{a,b}$, c'est-à-dire $b-a$ et $b+(n-1)a$, on obtient le système linéaire suivant vérifié par α et β :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (b-a)^k &=& \alpha(b-a) + \beta, \\ (b+(n-1)a)^k &=& \alpha(b+(n-1)a) + \beta. \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ou $L_2 \leftarrow (b-a)L_2 - (b+(n-1)a)L_1$ nous permettent d'obtenir directement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& \dfrac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na}, \\[2ex] \beta &=& \dfrac{(b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k}{na}. \end{array}\right.$$

Alors, en évaluant $(*)$ en $M(a,b)$, comme $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ d'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
M(a,b)^k &= \alpha M(a,b) + \beta \mathrm{I}_n \\
&= \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} M(a,b) + \frac{(b+(n-1)a)(b-a)^k - (b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} \mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Q 24. Puisque $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} (b-a)^k = \lim_{k \to +\infty} (b+(n-1)a)^k = 0.$$

L'expression de $M(a,b)^k$ de la question précédente nous permet d'en déduire, par continuité de $\lambda \mapsto \lambda M(a,b)$ et $\lambda \mapsto \lambda \mathrm{I}_n$ (ce sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie) :

$$\lim_{k \to +\infty} M(a,b)^k = 0 \times M(a,b) + 0 \times \mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Ainsi $\left(M(a,b)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Exercice 2 : e3a 2021

1. (1.1) La fonction $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est nulle, donc en isolant le terme de la somme correspondant à $k=-1$ on a :

$$\forall x \in J, \quad a_{-1}\ln(1+x) = -\sum_{k=0}^{p} a_k f_k(x) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k}.$$

Le membre de droite tend vers $-a_0$ quand $x \to +\infty$ (attention au fait que $f_0 = 1$ ne tend pas vers 0 en l'infini, au contraire des autres fonctions f_k). En particulier, c'est une limite finie. Pour que cette égalité soit vraie, il faut donc que $a_{-1}\ln(1+x)$ ait une limite finie quand $x \to +\infty$, ce qui n'est possible que si $a_{-1} = 0$: d'où le résultat.

(1.2) Pour montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre, nous devons démontrer que la seule relation de dépendance linéaire entre ces fonctions est la relation de dépendance triviale. Or, d'après la question précédente, s'il existe $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ tel que : $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k = 0$, alors $a_{-1} = 0$, ce qui nous donne une relation de la forme suivante (après multiplication par $(1+x)^p$) :

$$\forall x \in J, \quad a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(1+x) + a_p = 0.$$

La famille $\left((1+X)^k\right)_{k\in[\![0,p]\!]}$ est une famille de $\mathbb{R}_p[X]$ échelonnée en degré, donc elle est libre. On en déduit que la relation ci-dessus implique : $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $a_k = 0$. Ainsi $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![-1,p]\!]$, ce qui démontre ce qu'on voulait : la famille $\mathscr{B}$ est libre. (Certes, on a utilisé la liberté d'une famille de polynômes, alors que la relation de dépendance ci-dessus est avec une famille d'*applications polynomiales*, mais passer de l'une à l'autre ne souffre d'aucune difficulté.)

Remarque. Une autre stratégie, pour montrer l'indépendance linéaire, est de constater que si i est l'indice du plus grand scalaire a_i *non nul* de la relation de dépendance ci-dessus, alors on a $\sum_{k=0}^{p} a_k f_k(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{a_i}{(1+x)^i}$, et on en déduit que la fonction $\sum_{k=0}^{p} a_k f_k$ admet une limite infinie en -1 (ou égale à $a_0 \neq 0$ si $i=0$) : impossible s'il s'agit de la fonction nulle. Par l'absurde, on en déduit que tous les scalaires a_i sont nuls.

(1.3) La famille $\mathscr{B}$ engendre E par définition de E, et elle est libre d'après la question précédente. C'est donc une base de E, et on en déduit : $\dim(E) = \mathrm{card}(\mathscr{B}) = p+2$.

2. (2.1) Soient $k \in [\![-1,p]\!]$ et $x \in J$. Par définition de u, on a : $u(f_k)(x) = (1+x)f_k'(x)$. Si $k=-1$, alors $f_{-1}'(x) = \frac{1}{1+x}$, donc : $u(f_{-1})(x) = 1$, tandis que si $k \in [\![0,p]\!]$ alors on a : $f_k'(x) = -k(1+x)^{-k-1}$, puis : $u(f_k)(x) = -k(1+x)^{-k} = -kf_k$. En conclusion :

$$u(f_{-1}) = 1 \ \ (= f_0), \quad \forall k \in [\![0,p]\!],\ u(f_k) = -kf_k.$$

(2.2) La linéarité de u est évidente par linéarité de la dérivation. De plus, la question précédente montre que pour tout $k \in [\![-1,p]\!]$, on a $u(f_k) \in E$ (en effet les f_i engendrent E), et comme la stabilité d'un espace vectoriel par une application linéaire équivaut à la stabilité vérifiée sur une base, on en déduit que $u(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi u est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans E, donc c'est un endomorphisme de E.

(2.3) Déterminons le noyau de u. Soit $f \in E$ tel qu'on ait : $u(f) = 0_E$. Cela signifie : $\forall x \in J$, $(1+x)f'(x) = 0$. Comme $1 + x \neq 0$ pour $x \in J$, on en déduit : $\forall x \in J$, $f'(x) = 0$. Ainsi f est de dérivée nulle sur un intervalle, donc f est constante ; réciproquement, toute fonction constante vérifie bien $u(f) = 0_E$, donc $\ker(u)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur J. Notons que $f_0 = 1$, et donc que l'ensemble des fonctions constantes est $\mathrm{Vect}(f_0)$. Il est alors plus succinct de dire :

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}(f_0).$$

Passons à l'image de u. Comme E est engendré par $\mathscr{B}$, l'image de u est engendrée par $u(\mathscr{B})$. Or, d'après la question précédente :

$$\mathrm{im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(\mathscr{B})) = \mathrm{Vect}\left((u(f_{-1})) \cup (u(f_k))_{k\in[\![0,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right).$$

Puisque $-kf_k$ est nulle pour $k = 0$, on peut sans dommage retirer cette fonction des combinaisons linéaires de $(f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$. On a alors $\mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![1,p]\!]}\right)$. Multiplier des vecteurs par des scalaires non nuls ne change pas le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, donc : $\mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (-kf_k)_{k\in[\![1,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_0) \cup (f_k)_{k\in[\![1,p]\!]}\right) = \mathrm{Vect}\left((f_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right)$. En conclusion :

$$\mathrm{im}(u) = \mathrm{Vect}\left((f_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\right).$$

Remarque. Un autre argument serait d'utiliser la question précédente pour montrer que $f_0, \ldots, f_p \in \mathrm{im}(u)$. Comme un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire, on a aussi : $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_p) \subseteq \mathrm{im}(u)$. Le premier espace vectoriel admet pour base $(f_0, \ldots, f_p)$, donc il est de dimension $p+1$, tandis que $\mathrm{im}(u)$ est de dimension $(p+2) - \dim(\ker(u)) = p+1$ grâce au théorème du rang. L'inclusion, et l'égalité des dimensions, impliquent l'égalité des espaces.

(2.4) On a vu dans la question précédente que $f_{-1} \notin \mathrm{im}(u)$, donc : $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$.

(2.5) On reprend les calculs effectués dans la question 2.1, et on en déduit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Une écriture par blocs serait plus lisible, et surtout très agréable d'emploi pour les deux questions suivantes. Si l'on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}),$$

alors on a : $M = \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{R})} & D \end{pmatrix}$.

(2.6) Il revient au même de déterminer si u ou si M est diagonalisable. Étudions si M l'est.

On sait calculer le déterminant d'une matrice diagonale par blocs : c'est le produit des déterminants des blocs diagonaux. La question précédente implique donc facilement, en considérant le déterminant de $\lambda \mathrm{I}_{p+2} - M$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\chi_M = \chi_A \times \chi_D = X^2 \times \prod_{k=1}^{p} (X+k).$$

On en déduit notamment que 0 est valeur propre de M, d'ordre de multiplicité 2, or $\dim(\ker(M)) = \dim(\ker(u)) = 1 < 2$ d'après notre étude de la question 2.3. D'après le critère de diagonalisation, M n'est pas diagonalisable, et donc u non plus.

Remarque. C'est un exercice relativement fréquent de montrer que si un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable, alors : $\ker(u) \oplus \mathrm{im}(u) = E$. Or la description explicite qu'on a trouvée de $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$ montre que $\ker(u) \cap \mathrm{im}(u) = \mathrm{Vect}(f_0) \neq \{0_E\}$, donc on pouvait déjà montrer dès la question 2.3 que u n'est pas diagonalisable.

(2.7) Avec les notations de la question 2.5, on a : $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0_{\mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{R})} & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} & 0_{\mathrm{M}_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{p,2}(\mathbb{R})} & D^2 \end{pmatrix}$ (calcul direct pour A^2). C'est une matrice diagonale, donc u^2 admet une matrice diagonale dans la base $\mathscr{B}$: on en déduit que u^2 est diagonalisable.

3. Soit $y : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur J et vérifiant : $\forall t \in J,\ f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$. Ceci équivaut à :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}.$$

On reconnaît, dans le membre de droite, la dérivée de $t \mapsto \dfrac{(\ln(1+t))^2}{2}$ (en effet c'est de la forme $u'u$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$). Donc cette égalité est vraie si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad y(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c,$$

ce qui donne l'ensemble des solutions de (ED).

4. (4.1) Déterminons d'abord h_2. D'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in J$, $h_2(t) = \frac{(\ln(1+t))^2}{2} + c$. Or $h_2(0) = 0$ par hypothèse, donc l'égalité précédente implique $c = 0$. Ainsi h_2 est l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^2}{2}$, et déterminer h_3 revient à résoudre :

$$\forall t \in J, \quad h_3'(t) = \frac{1}{2}\frac{(\ln(1+t))^2}{1+t}.$$

Le membre de droite est (à la constante $\frac{1}{2}$ près) de la forme $u'u^2$, donc en imitant la résolution de (ED) on en déduit l'existence de $c' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad h_3(t) = \frac{(\ln(1+t))^3}{6} + c'.$$

Comme $h_3(0) = 0$, on a encore $c' = 0$, donc h_3 est l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^3}{6}$, d'où le résultat demandé.

(4.2) On démontre par récurrence sur k que pour tout entier $k \geqslant 2$ et tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$. L'initialisation a déjà été effectuée dans les deux questions précédentes.

Montrons l'hérédité de cette proposition. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On suppose que pour tout $t \in J$, on a : $h_k(t) = \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$. Alors h_{k+1} est, par définition, l'unique application à vérifier :

$$\begin{cases} \forall t \in J, \quad h_{k+1}'(t) &= \frac{h_k(t)}{1+t} = \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}, \\ \qquad\qquad h_{k+1}(0) &= 0. \end{cases}$$

(Notons que l'existence d'une telle application est assurée *a priori* par le théorème fondamental de l'analyse.)
L'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{1+t}$ est de la forme $u'u^k$ avec $u : t \mapsto \ln(1+t)$, donc une primitive en est $\frac{u^{k+1}}{k+1}$, c'est-à-dire l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1}$. On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad h_{k+1}(t) = \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{k+1} + c = \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!} + c,$$

et la condition $h_{k+1}(0) = 0$ donne $c = 0$. Donc h_{k+1} est bien l'application $t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^{k+1}}{(k+1)!}$, ce qui démontre le résultat voulu au rang $k+1$.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par récurrence on a montré que pour tout entier $k \geqslant 2$, la solution nulle en zéro de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$ est l'application $h_k : t \mapsto \frac{(\ln(1+t))^k}{k!}$.