Devoir Maison

Espaces Prehilbertiens

CCP PSI2 2007

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.
Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.
On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A et ${}^tB$ la transposée d'une matrice B quelconque.
Etant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on identifie A avec le réel a.

Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.
Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$:
- on note $[|p, n|]$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq n$.
- on rappelle la notation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

Objectifs.

Dans ce problème, on définit la matrice de Gram d'une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.
La première partie porte sur des calculs de déterminants, la valeur d'un des déterminants calculés servant à illustrer la quatrième partie.
Dans la deuxième partie, on définit les matrices de Gram et on en étudie quelques propriétés.
Les troisième et quatrième parties sont des applications de la deuxième partie.

PARTIE I.

Les résultats de cette partie ne serviront que dans la partie IV.

I.1. Déterminant d_p.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [|0, n|]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in [|1, n-p+1|] \times [|1, n-p+1|]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

I.1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

I.1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

I.1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

I.1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i.

I.1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

I.2. Déterminants D_n et Δ_n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n.**
On note $D_n = \det((i+j)!)$. Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in [|0, n|] \times [|0, n|]$.

I.2.1. Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.
I.2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n.
I.2.3. En déduire Δ_n puis D_n.

PARTIE II.

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.1. Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in [|1, n|]$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

II.A.1.1 Pour $(i, j) \in [|1, n|] \times [|1, n|]$, déterminer le produit ${}^tX_iCX_j$.

II.A.1.2 En déduire que $C = 0$ si et seulement si pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXCY = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (e_i|e_j)$ le produit scalaire de e_i et e_j.
Pour tout vecteur u de E, on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.

II.A.2. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, justifier l'égalité $(x|y) = {}^tXAY$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E et soit $A' = (a'_{i,j})$ la matrice carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a'_{i,j} = (e'_i|e'_j)$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3. Pour tout vecteur u de E, on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

II.A.3.1 Soit x un vecteur de E. Donner une relation entre les matrices X, X' et P.

II.A.3.2 Justifier l'égalité $A' = {}^tPAP$.

II.A.3.3 Que devient l'égalité précédente lorsque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale ?

II.A.3.4 Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

II.A.3.5 Déduire des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = ((\varepsilon_i|\varepsilon_j))$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)$, vérifie $\det(B) > 0$.

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1, \dots, u_n$. Soit $M = ((u_i|u_j))$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(u_i|u_j)$. A toute matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i$.

II.B.1. Dans cette question on suppose $n = 2$.

II.B.1.1 Montrer que $\det(M) \geq 0$.

II.B.1.2 A quelle condition sur $\det(M)$ la famille (u_1, u_2) est-elle libre ?

On revient au cas général où n est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

II.B.2. Exprimer les coefiicients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i|v)$.

II.B.3. En déduire l'égalité ${}^tXMX = \|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur v.

II.B.4. Soit λ une valeur propre (complexe) de la matrice M. Justifier que λ appartient à $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda \geq 0$.

II.B.5. Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

II.B.6. On suppose que la matrice M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

<u>Définition</u> : étant donné n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on appelle matrice de Gram des vecteurs $v_1, \dots, v_n$, la matrice $G(v_1, \dots, v_n) = ((v_i|v_j))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $(v_i|v_j)$.
Il résulte de la partie II que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det(G(v_1, \dots, v_n)) \neq 0$; dans ce cas, on a $\det(G(v_1, \dots, v_n)) > 0$.

PARTIE III.

Dans cette partie, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ supposé orienté, u_1, u_2, u_3 sont trois vecteurs unitaires de E. On note α, β, γ les réels de $[0, \pi]$ tels que $(u_1|u_2) = \cos(\alpha)$, $(u_2|u_3) = \cos(\beta)$, $(u_3|u_1) = \cos(\gamma)$ et on suppose que $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$.

III.1. déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 - 2X\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

III.2. En déduire une factorisation de $\det(G(u_1, u_2, u_3))$ en produit de deux facteurs.

III.3. Montrer que $\cos(\alpha)$ est compris entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

III.4. Montrer que $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ou $\alpha = \beta + \gamma$.

III.5. On suppose que $\alpha = \beta = \gamma$ et on note $c = \cos(\alpha)$.

III.5.1 Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En déduire ses valeurs propres.

III.5.2 Déterminer la plus petite valeur possible de c.

III.5.3 On prend $c = -\frac{1}{2}$.

III.5.3.1 Quelle est la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$?

III.5.3.2 Déterminer le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $G(u_1, u_2, u_3)$. En utilisant **II.B.5**, retrouver la valeur de $u_1 + u_2 + u_3$.

PARTIE IV.

Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.
On considère n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$.

IV.1. Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV.1.1. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de λ et de $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n))$

IV.1.2. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.2. Soit $F = Vect(v_1, \ldots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

IV.2.1. Soit w un vecteur de $\mathcal{H}$ orthogonal à F. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.2.2. Soit $v \in \mathcal{H}$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F. Montrer l'égalité $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

IV.3. Calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

IV.3.1. Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier la convergence des intégrales $J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ et calculer leur valeur.

On rappelle (et on admettra) que $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$.
On considère la base de $\mathbb{R}[X]$ formée des vecteurs e_k où $e_k = X^k$, $k \in \mathbb{N}$.

IV.3.2. Calculer les produits scalaires $(e_i|e_j)$.

IV.3.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes et de la partie **I**, la distance du vecteur e_n au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leq n - 1$ de l'espace $\mathbb{R}[X]$.

CCP PSI2 2007
un corrigé

1 Calculs de déterminants.

1.1 On a

$$a_{1,1} = \binom{p}{p},\ a_{1,n-p+1} = \binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1} = \binom{n}{n},\ a_{1,n-p+1} = \binom{2n-p}{n}$$

1.2 On a

$$d_n = \det(1) = 1$$

$$d_{n-1} = \det\begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = 1$$

$$d_{n-2} = \det\begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix} = 1$$

ce dernier résultat résultant d'un calcul au brouillon non reporté.

1.3.1 On sait que $\binom{\beta}{\alpha} + \binom{\beta}{\alpha+1} = \binom{\beta+1}{\alpha+1}$ que l'on va utiliser sous la forme

$$\binom{\beta+1}{\alpha+1} - \binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta}{\alpha+1}$$

En notant $A'_p = (a'_{i,j})$ la nouvelle matrice, la formule précédente donne (on doit distinguer le cas de la première colonne)

$$\forall i \geq 2,\ a'_{i,1} = 0 \ \text{ et } \ a'_{i,j} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

1.3.2 Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p) = \det(A'_p)$. En effectuant un développement par rapport à la première colonne, on obtient

$$d_p = \det(A'_p) = \det\left(\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\right)_{2\leq i,j\leq n-p+1}$$

En opérant un changement d'indice ($i' = i-1$ et $j' = j-1$) ceci s'écrit

$$d_p = \det\left(\binom{p+1+i'+j'-2}{p+1+i'-1}\right)_{1\leq i',j'\leq n-(p+1)+1} = d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall p \in [|0,n|],\ d_p = d_n = 1$$

2.1 On a

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

2.2 Comme $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\frac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\frac{1}{j!}$. Le déterminant étant multilinéaire, on a alors

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)^2 D_n$$

2.3 On a

$$\Delta_n = \left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\le i,j\le n} = \left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\le i',j'\le n+1} = d_0 = 1$$

et donc

$$D_n = \prod_{k=0}^{n} (k!)^2$$

2 Matrices de Gram.

A.1.1 Un calcul matriciel donne immédiatement

$${}^tX_iCX_j = c_{i,j}$$

A.1.2 Si C est nulle alors ${}^tXCY$ est nul pour tout choix de X et Y.
Réciproquement, si ceci a lieu c'est vrai en particulier pour les X_i et la question précédente donne la nullité de tous les $c_{i,j}$ c'est à dire de C.

A.2 Avec des notations évidentes, on a

$$(x|y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,|\, \sum_{j=1}^{n} y_i e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i (e_i|e_j) y_j$$

Par ailleurs,

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^{n} x_i \,(AY)_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j$$

Par définition de A, on a donc

$$(x|y) = {}^tXAY$$

A.3.1 Comme $P = Mat(Id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$, on a

$$X = PX'$$

A.3.2 D'après $A.2$, on a

$${}^tXAY = (x|y) = {}^tX'A'Y'$$

Compte-tenu de la question précédente, on en déduit que

$${}^tX'{}^tPAPY' = {}^tX'A'Y'$$

Comme ceci a lieu pour tout choix de X' et Y', la question $A.1$ donne

$$A' = {}^tPAP$$

A.3.3 Si on a $\mathcal{B}'$ orthonormale alors $A' = I_n$ et on obtient ${}^tPAP = I_n$.

A.3.4 On choisit $\mathcal{B}'$ orthonormale (une telle base existe). On a alors, en passant au déterminant

$$\det(P)^2 \det(A) = \det(I_n) = 1$$

Comme $\det(P)^2 > 0$, on a donc $\det(A) > 0$.

A.3.5 Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une famille libre de E et F l'espace engendré par ces vecteurs. Le produit scalaire sur E en induit un sur F qui est donc préhilbertien. La matrice $B = ((\varepsilon_i|\varepsilon_j))$ correspond alors à la matrice A précédente et $\det(B) > 0$.

B.1.1 On a

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & (u_1|u_2) \\ (u_1|u_2) & \|u_2\|^2 \end{vmatrix} = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette quantité est positive.

B.1.2 D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\det(M) = 0$ si et seulement si (u_1, u_2) liée. La famille est donc libre si et seulement si $\det(M) \neq 0$ (et dans ce cas $\det(M) > 0$).

B.2. On a

$$(MX)_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j(u_i|u_j)$$

Par linéarité par rapport à la seconde variable du produit scalaire, on en déduit que

$$(MX)_i = (u_i|v)$$

B.3. On en déduit que

$${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} x_i(MX)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(u_i|v) = (v|v) = \|v\|^2$$

cette fois par linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire.

B.4. M étant symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs propres sont réelles. Soit λ une telle valeur propre. Il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. La question précédente donne

$$\lambda\|X\|^2 = {}^tXMX = \|v\|^2 \geq 0$$

et comme $\|X\|^2 > 0$, on a donc $\lambda \geq 0$.

B.5. Si $MX = 0$ alors $\|v\|^2 = {}^tXMX = 0$ et donc $v = 0$.
Réciproquement, on suppose que $v = 0$. D'après la question $B.2$ tous les coefficients de MX sont nuls et donc $MX = 0$.

B.6. On suppose M inversible. Supposons $\sum x_iu_i = 0$; on a alors $MX = 0$ où X est la matrice unicolonne de coordonnées x_i. Comme M est inversible, ceci implique que $X = 0$ et donc que $\forall i,\ x_i = 0$. La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est donc libre.

3 Application en dimension 3.

1. Le discriminant du polynôme vaut

$$4\cos^2(\beta)\cos^2(\gamma) + 4 - 4\cos^2(\beta) - 4\cos^2(\gamma) = 4(1 - \cos^2(\gamma))(1 - \cos^2(\beta)) = (2\sin(\beta)\sin(\gamma))^2$$

On en déduit que les racines de P sont

$$\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma) = \cos(\beta + \gamma)$$

$$\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma) = \cos(\beta - \gamma)$$

2. On a

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première colonne donne

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) == -(\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1 = -P(\cos(\alpha))$$

et donc

$$\det(G(u_1, u_2, u_3)) = -(\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha) - \cos(\beta - \gamma))$$

3. Le déterminant précédent est positif et le produit $(\cos(\alpha) - \cos(\beta + \gamma))(\cos(\alpha) - \cos(\beta - \gamma))$ est donc négatif. $\cos(\alpha)$ doit donc être compris entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

4. Le déterminant est nul si et seulement si $\cos(\alpha) = \cos(\beta + \gamma)$ ou $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$.

- Comme $\alpha, \beta - \gamma \in [0, \pi]$, la seconde égalité implique $\alpha = \beta - \gamma$ ou encore $\alpha + \gamma = \beta$. Comme $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$ on a alors $\gamma = 0$ et $\alpha = \beta$ et donc $\alpha = \beta + \gamma$.
- Comme $\alpha \in [0, \pi]$ et $\beta + \gamma \in [0, 2\pi]$, la première égalité implique $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha = 2\pi - \beta - \gamma$.

Si le déterminant est nul on a donc $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. La réciproque est immédiate.

5.1. On a

$$\det(G(u_1, u_2, u_3) - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & c & c \\ c & 1-x & c \\ c & c & 1-x \end{vmatrix} = -(x - 1 - 2c)(x - 1 + c)^2$$

Les valeurs propres de $G(u_1, u_2, u_3)$ sont donc $1 + 2c$ et $1 - c$.

5.2. Comme les valeurs propres de $G(u_1, u_2, u_3)$ sont positives (II.B.4) on a donc $c \geq -\frac{1}{2}$. Il est par ailleurs possible que c prenne cette valeur (quand les trois vecteurs sont coplanaires, u_2 et u_3 s'obtenant par rotation d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$ du vecteur u_1).
$-1/2$ est donc la plus petite valeur possible pour c.

5.3.1 Comme $c = -1/2$, $G(u_1, u_2, u_3) = 0$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. On est dans la situation évoquée à la question précédente et

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

5.3.2 On a $G(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang au moins 2 (deux premières colonnes libres). Son noyau est de dimension au plus 1. Comme $(1, 1, 1)$ est dans le noyau de $G(u_1, u_2, u_3)$, on a donc

$$\mathrm{Ker}(G(u_1, u_2, u_3)) = Vect((1, 1, 1))$$

D'après II.B.5 on a $v = u_1 + u_2 + u_3$ qui est nul.

4 Distance à un sous-espace.

1.1. Dans $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$, la dernière colonne puis la dernière ligne se factorisent par λ. Par multilinéarité du déterminant vis à vis des lignes ou colonnes, on a donc

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n)) = \lambda^2 \det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$$

1.2. Dans $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$, on fait l'opération élémentaire (qui laisse le déterminant invariant) $L_n \leftarrow L_n - \lambda L_1$. On fait alors la même opération sur la n-ième colonne du déterminant obtenu. On obtient alors

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \lambda v_1)) = \det(G(v_1, \dots, v_n)$$

2.1. w étant orthogonal à F est orthogonal à tous les v_i. $G(v_1, \dots, v_n, w)$ s'écrit donc, par blocs, $\begin{pmatrix} G(v_1, \dots, v_n) & 0 \\ 0 & \|w\|^2 \end{pmatrix}$ et ainsi (déterminant bloc-diagonal ou développement par rapport à la dernière colonne)

$$\det(G(v_1, \dots, v_n, w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

2.2. Soit $p(v)$ le projeté orthogonal de v sur F (qui existe car F est de dimension finie) et $w = v - p(v)$. Comme $w \in F^{\perp}$, la question précédente donne

$$\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, w)) = \|w\|^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$$

Le cours indique que $d(v,F) = \|w\|$ et on a donc montré que

$$\det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v_n,v-p(v))) = (d(v,F))^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

Par ailleurs $p(v) \in F$ s'écrit $p(v) = \sum \lambda_i v_i$. En itérant le résultat de la question IV.1.2 (où $v_1,\dots,v_{n-1}$ jouent des rôles symétriques) on a donc

$$det(G(v_1,\dots,v_{n-1},v)) = (d(v,F))^2 \det(G(v_1,\dots,v_n))$$

3.1. $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (seul problème d'intégrabilité au vosinage de l'infini) et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de l'infini (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^a t^{k+1}e^{-t}\,dt = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^a + (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}\,dt$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N},\ J_{k+1} = (k+1)J_k$$

Comme $J_0 = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ J_k = k!$$

3.2. On a alors

$$\forall i,j \in \mathbb{N},\ (e_i|e_j) = J_{i+j} = (i+j)!$$

3.3. La question IV.2.2 donne alors

$$d(e_n,\mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}} = (n!)^2$$

et on a montré que

$$d(e_n,\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n!$$