Probabilités

Exercice 1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements indépendants. On note $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

A. On suppose que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ et on souhaite prouver que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$;
2. Montrer que la suite (D_n) est décroissante.
3. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$. Interpréter ce résultat.

B. On suppose que $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements **indépendants** et que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et on souhaite prouver que $\mathbb{P}(A) = 1$.

1. Justifier que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. Soient $n \leq N$. On note $E_{n,N} = \bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}$ et $E_n = \bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}$.
   a. Démontrer que (n étant fixé), $\lim_{N\to+\infty} \ln\left(\mathbb{P}(E_{n,N})\right) = -\infty$.
   b. En déduire que $\mathbb{P}(E_n) = 0$.
   c. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2

1. On jette 2 dés équilibrés simultanément. Donner, pour tout $i \in \{2, \ldots, 12\}$, la probabilité que la somme des résultats fasse i.
2. On effectue des lancers répétés de deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 9 ou 7 apparaisse. On désigne par E l'événement : « La première apparition d'une somme de 9 se fera avant celle d'une somme de 7 ». On se propose de calculer $P(E)$
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les évènements
   E_n : « ni de 7 ni de 9 au cours des $n-1$ premiers lancers et le n-ième donne 9. »
   F_n : « obtention d'un 9 au n-ième lancer. »
   G_n : « ni de 7 ni de 9 au n-ième lancer. »
   Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$
   a. Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes en fonction des E_n, puis en fonction des F_n et G_n.
   b. Calculer $P(E_n)$.
   c. En déduire $P(E)$.

Exercice 3

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules deux par deux, sans remise, jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?
IND : considérer les événements E_k : « une boule de chaque couleur au k-ième tirage ».

Exercice 1

B.

1. Par la sous-additivité d'une probabilité,
$$0 \leq P(D_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$
La dernière somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car c'est le reste d'une série convergente. Par le théorème d'encadrement, $(P(D_n))$ tend vers 0.
2. On écrit que $A = \bigcap_n D_n$. On va démontrer que la suite (D_n) est décroissante. En effet,
$$D_n = D_{n+1} \cup A_n.$$
On peut donc utiliser la continuité monotone décroissante de P pour en déduire
$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(D_n) = 0.$$
Presque sûrement, seul un nombre fini des événements A_n peuvent se produire simultanément.

B.

1. La fonction ln est concave. Sa courbe représentative est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1. L'inégalité demandée est juste la traduction analytique de cette propriété géométrique.
2. a. Les événements A_k étant indépendants, il en est de même des événements $\overline{A_k}$, et donc
$$P(E_{n,N}) = \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)).$$
En utilisant l'inégalité précédente, on a
$$\ln\left(P(E_{n,N})\right) \leq -\sum_{k=n}^{N} P(A_k).$$
Puisque $\sum_{k \geq n} P(A_k) = +\infty$, on en déduit le résultat.

   b. Par composition par la fonction exponentielle, $\left(P(E_{n,N})\right)$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini (et n reste fixé). Mais, la suite $(E_{n,N})_N$ est décroissante et
$$E_n = \bigcap_{N \geq n} E_{n,N}.$$
Ainsi,
$$P(E_n) = \lim_N P(E_{n,N}) = 0.$$

   c. A s'écrit $A = \bigcap_n \overline{E_n}$. La suite $(\overline{E_n})$ est décroissante et $P(\overline{E_n}) = 1$. Ainsi, on trouve que
$$P(A) = \lim_n P(E_n) = 1.$$

Exercice 2

1. On choisit comme modèle l'équiprobabilité sur $[\![1,6]\!]^2$. En notant p_i la probabilité que la somme fasse i, on a $(p_2, \ldots, p_{12}) = \frac{1}{36}(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)$.
2. a. $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} G_i \right) \cap F_n \right)$ puisque

   — E se réalise si et seulement si l'un des E_n se réalise, c'est-à-dire $E = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.

— Pour $n \geq 2$, E_n se réalise si et seulement si $G_1, \dots G_{n-1}$ et F_n se réalisent, c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2,\ E_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} G_i\right) \cap F_n.$$

b. On suppose les lancers indépendants. A chacun des $n-1$ premiers coups, la probabilité pour que ni une somme de 9 ni une somme de 7 n'apparaisse est $1-(p_9+p_7) = \frac{13}{18}$. Au n-ième coup, la probabilité qu'une somme de 9 apparaisse est $p_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. On en déduit :

$$P(E_n) = (1-(p_9+p_7))^n p_9 = \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

formule toujours valable pour $n = 1$.

c. Puisque les E_n sont deux à deux incompatibles, la σ-additivité de P donne :

$$P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

Exercice 3

On note E_k : « une boule de chaque couleur au k-ième tirage ».

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cap \dots \cap E_n) &= P(E_1)\prod_{k=2}^{n} P\left(E_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i\right) = \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} \prod_{k=2}^{n} \frac{\binom{n-(k-1)}{1}\binom{n-(k-1)}{1}}{\binom{2(n-k+1)}{2}} \\
&= \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{2(n-k+1)^2}{(2n-2k+2)(2n-2k+1)} = \frac{2^n\left(n^2(n-1)^2 \cdots 1^2\right)}{2n(2n-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}
\end{aligned}$$

puisque au k-ième tirage, il reste dans l'urne $2(n-k+1)$ boules : $n-k+1$ blanches et $n-k+1$ noires.