Devoir Maison

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 : CNC 2022

Étude de suites récurrentes et application

(Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, on considère des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée du couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} .$$

0.1 **Première méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

On considère les matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire ses valeurs propres.

0.1.2 Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.3 Justifier que la matrice P est inversible et calculer le produit matriciel $D = P^{-1}AP$.

0.1.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis en déduire les expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

0.1.5 Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

0.1.6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis en déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de u_o, v_0 et $n \in \mathbb{N}$.

0.2 **Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

0.2.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

0.2.2 Montrer que l'ensemble $F = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+} = 2x_{n+1} + x_n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des suites réelles, puis en donner la dimension et une base.

0.2.3 En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et $\underset{n}{v_0}$.

Exercice 2 : CNC 2023

Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, E_n désigne le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On note Φ l'application de E vers E définie par :

$$\forall\, P \in E, \quad \Phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

2.1. Linéarité de Φ

2.1.1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

2.1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.

Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on pose $\varepsilon_k = X^k$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n, c'est sa base canonique.

2.1.3. Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

2.2. Étude de l'endomorphisme Φ_3

2.2.1. Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

2.2.2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_3 ?

2.2.3. L'endomorphisme Φ_3 est-il diagonalisable ?

2.3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$ et on note P_n le polynôme dérivé $n-$ième du polynôme U_n, c'est-à-dire $P_n = U_n^{(n)}$. On convient enfin que $U_0 = P_0 = 1$.

2.3.1. Établir que, pour tout entier naturel n, $\quad (X^2-1)U_n' - 2nXU_n = 0$.

2.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $(n+1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que

$$\Phi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

2.3.3. Montrer alors que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, formée de vecteurs propres de Φ_n. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

2.4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1. Montrer que si $\Phi(P) = n(n+1)P$, alors $p = n$.

2.4.2. Ici on prend $p = n$, on écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

(i) Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.

(ii) En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment à l'aide de α_n.

2.4.3. Que peut-on alors dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\big(\Phi - n(n+1)\mathrm{id}_E\big)$? Ce résultat était-il prévisible sans calcul ?

CNC-Corrigé[1]

Exercice 1 : CNC 2022

Étude de suites récurrentes et application

0.1 **Première méthode de calcul des termes des suites** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.1.1 $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det A = X^2 - 2X - 1$, d'où $\operatorname{Sp}(A) = \left\{ 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2} \right\}$.

0.1.2 Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}$ à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

0.1.3 $\det P = 2\sqrt{2} \neq 0$, donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. On vérifie facilement que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

0.1.4 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où:

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] & \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}.$$

0.1.5 On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, puis par récurrence $X_n = A^n X_0$.

0.1.6 Puisque $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, alors la première ligne donne la valeur de u_n et la deuxième ligne donne la valeur de v_n, on trouve:

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}u_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]v_0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]u_0 + \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}v_0.$$

[1] medtarqi@yahoo.fr

0.2 Deuxième méthode de calcul des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2v_{n+1} \\ &= u_{n+1} + 2u_n + 2v_n \\ &= u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1} - u_n \\ &= 2u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

De même, on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

0.2.2 F contient la suite de terme général nul et stable par toute combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & F & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_0, y_0) \end{array}.$$

Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en effet, il est clair que φ est linéaire, de plus pour chaque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une seule suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $x_0 = a$ et $x_1 = b$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de dimension finie et $\dim F = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Il suffit alors de connaître une famille libre de deux suites de F, l'espace F est alors engendré par cette famille libre.
L'idée est alors de rechercher des suites géométriques vérifiant la récurrence de F. C'est-à-dire chercher des scalaires r tels que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Ceci est équivaut à résoudre l'équation du second degré $r^2 - 2r - 1 = 0$. Soient $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ les deux racines distinctes. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F et forment une base de F:

$$F = \text{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

0.2.3 D'après ce qui précède, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que, pour tout entier n, on a:

$$u_n = \lambda_1(1+\sqrt{2})^n + \lambda_2(1-\sqrt{2})^n$$

et

$$v_n = \lambda_3(1+\sqrt{2})^n + \lambda_4(1-\sqrt{2})^n.$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = u_0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = u_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4 = v_0 \\ \lambda_3 r_1 + \lambda_4 r_2 = v_1 \end{cases}.$$

Le premier système donne $\lambda_1 + \lambda_2 = u_0$ et $\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = u_1 - u_0 = u_0 + 2v_0 - u_0 = 2v_0$, donc on peut exprimer λ_1 et λ_2 en fonction de u_0 et v_0 et par conséquent u_n peut être exprimé en fonction de n, u_0 et v_0. Même chose pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.