My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison
Suites et Séries de fonctions
(e3a 2011)

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A.

1. Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
   $$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$$
   (b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u'_n convergent uniformément sur $[-a, a]$.

   On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v'_n.
3. On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.
   (a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.
   (b) Démontrer que F est paire.
   (c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Partie B.

1. Montrer que pour tout entier naturel k,
   $$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\,dx$$
   En déduire les coefficients de Fourier réels de la fonction F.
2. Démontrer que pour tout réel t on a
   $$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt)$$
   où l'on précisera l'expression des réels a_k.
3. (a) Montrer que pour tout réel α, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds$ est convergente.
   (b) Montrer que $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ks)}{1+s^2}\,ds$.
   On pourra utiliser les changements de variables $s = x + 2n\pi$ et $r = 2n\pi - x$.

Partie A.

1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Comme $u_n(t) \sim \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et $v_n(t) \sim \frac{1}{4\pi^2 n^2}$, $\sum(u_n(t))$ et $\sum(v_n(t))$ sont absolument convergente par comparaison aux séries de Riemann. On a donc convergence simple de $\sum(u_n)$ et $\sum(v_n)$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On a $u_n'(t) = -\frac{2(t+2n\pi)}{(1+(t+2n\pi)^2)^2}$. Soit N la partie entière de $\frac{a}{2\pi} + 1$; pour tout $n \geq N$ et tout $t \in [-a, a]$, on a $n \geq \frac{a}{2\pi} \geq \frac{-t}{2\pi}$ ($t \geq -a$ donnant $a \geq -t$) et donc $u_n'(t) \leq 0$. Pour $n \geq N$, u_n est ainsi décroissante sur $[-a, a]$ (sa dérivée y est négative) et

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = \max(|u_n(a)|, |u_n(-a)|) = u_n(-a)$$

   (b) $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ vaut $u_n(-a)$ à partir d'un rang certain rang N et $\sum(u_n(-a))$ converge. $\sum(u_n)$ est donc normalement convergente sur $[-a, a]$ et donc aussi uniformément convergente sur cet ensemble. De même, comme $\forall x \geq 0,\ \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ (car $(1-x)^2 \geq 0$) on a

$$\forall n \geq N,\ \forall t \in [-a, a],\ |u_n'(t)| = \frac{2|t + 2n\pi|}{1 + |t + 2n\pi|^2}|u_n(t)| \leq u_n(-a)$$

   Le majorant est indépendant de t et est le terme général d'une série convergente. $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $[-a, a]$ et donc aussi uniformément convergente sur cet ensemble.

3. (a) Le cours nous donne le résultat suivant.

> **Théorème** : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que
> i. $\sum(f_n)$ converge simplement sur I
> ii. $\sum(f_n')$ converge normalement sur tout segment de I
> Alors, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

   On l'utilise pour étudier les sommes des série s$\sum(u_n)$ et $\sum(v_n)$. On a la convergence simple des séries et la convergence normale des séries dérivées sur tout segment (tout segment étant inclu dans un segment centré sur 0). De plus u_n et v_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et le théorème s'applique. Comme u_0 est de classe $\mathcal{C}^1$, F l'est aussi et

$$F' = u_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n' + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'$$

   (b) La parité de F découle de $u_n(-t) = v_n(t)$ et $v_n(-t) = u_n(t)$ ainsi que de la parité de u_0.

   (c) On a

$$\begin{aligned}
F(t + 2\pi) &= u_0(t + 2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t + 2\pi) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t + 2\pi) \\
&= u_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1}(t) + v_1(t + 2\pi) + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(t + 2\pi) \\
&= u_1(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(t) + u_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) \\
&= F(t)
\end{aligned}$$

   et F est 2π-périodique.

Partie B.

1. Par définition de F et linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi u_0(x)\,dx + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty}\cos(kx)u_n(x)\,dx + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty}\cos(kx)v_n(x)\,dx$$

$|\cos(kx)u_n(x)| \leq |u_n(x)|$ et la normale convergence de $\sum(u_n)$ sur $[0,\pi]$ entraîne celle de la série de fonctions de terme général $x\mapsto\cos(kx)u_n(x)$. On est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment. On procède de même pour l'autre interversion et on obtient

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x+2n\pi)^2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+(x-2n\pi)^2}\,dx$$

F étant paire, ses coefficients de Fourier “en sinus” sont nuls et ceux en cosinus valent

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(x)\,dx \ \text{ et } \ \forall k\geq 1,\ a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx$$

Au vu de le suite du sujet, il ne semble pas que l'on en attende plus à ce niveau.

2. F étant de classe $\mathcal{C}^1$ (continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux suffirait), sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est F. Ainsi,

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\cos(kt)\,dt$$

On pose donc, pour la suite

$$\forall k\in\mathbb{N},\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx$$

3. (a) $s\mapsto \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/s^2$ au voisinage de $+\infty$ (et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale est a fortiori convergente.

   (b) On peut ainsi écrire que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds = \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds$$

Dans l'expression de la question 1, on faitles changement de variables indiqués par l'énoncé pour obtenir

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{1+x^2}\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\,dx - \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k-1)\pi}\frac{\cos(kr)}{1+r^2}\,dr$$

On peut regrouper les sommes (convergentes) et les intégrales (relation de Chasles) pour obtenit

$$\int_0^\pi F(x)\cos(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\cos(\alpha s)}{1+s^2}\,ds$$

On en déduit finalement que

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ks)}{1+s^2}\,ds$$

Partie C.

Je choisis de noter $f\ :\ (x,s)\mapsto \frac{\cos(xs)}{1+s^2}$.

1. Pour tout $x\geq 0$, $s\mapsto f(x,s)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $s\geq 0$, $x\mapsto f(x,s)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tous $x\geq 0$ et $s\geq 0$, $|f(x,s)|\leq \frac{1}{1+s^2}$ et le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètres, on peut affirmer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. La domination précédente indique que
   $$\forall x\in\ \mathbb{R},\ |\phi(x)|\leq \int_0^{+\infty}\frac{ds}{1+s^2}=\phi(0)=\frac{\pi}{2}$$

2. (a) Le changement de variable $t=xs$ est licite pour $x>0$ (c'est alors un changement affine licite) et donne
   $$\forall x>0,\ \phi(x)=x\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt$$

   (b) Pour tout $x>0$, $t\mapsto \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout $t\geq 0$, $x\mapsto \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x\mapsto -\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$.
   Pour tout $x>0$, $t\mapsto -\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tous réels $0<a<b$,
   $$\forall x\in[a,b],\ \forall u\geq 0,\ \left|\frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\right|\leq\frac{1}{a^2+u^2}$$
   $$\forall x\in[a,b],\ \forall u\geq 0,\ \left|-\frac{2x\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\right|\leq\frac{2b}{(a^2+u^2)^2}$$

Partie C.

Soit ϕ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{1+s^2}\, ds$.

1. Montrer que ϕ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\phi(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\phi(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2 + t^2}\, dt$$

   (b) En déduire que la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - 2x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2 + t^2)^2}\, dt$$

   (c) Montrer alors que

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \frac{1}{x}\phi(x) - \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1 + s^2)^2}\, ds$$

3. Soit la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xs)}{(1+s^2)^2}\, ds$.
   (a) Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, à l'aide d'une intégration par parties, que l'on a

$$\forall x > 0,\ \psi'(x) = x\phi(x)$$

   (b) En déduire que ϕ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie l'équation différentielle

$$\forall x > 0,\ \phi''(x) = \phi(x)$$

4. Déterminer alors a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \frac{1 - e^{-2}}{2(1 - 2e^{-1}\cos(t) + e^{-2})}$$