My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Devoir Maison

Séries Numériques (e3a 2009)

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.
3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   (c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).
5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B.

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
2. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.
   (a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.
   (b) Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.
3. Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\ ;\ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\ ;\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   (a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.
   (b) Utimiser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
   (c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

   (d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.
   (e) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
      i) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.
      ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
      iii) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

1. Si $\lambda < 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum(u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

2. On a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
et ainsi
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. (a) Comme $\beta - \lambda < 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi
$$\exists\, N/\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
   (b) Ce qui précède s'écrite $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors
$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$
   (c) Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum(K v_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum(u_n)$.

4. Si $\lambda \in [0,1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda, 1[$. On a alors
$$\exists\, N/\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
et une récurrence immédiate donne
$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$
Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum(K v_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum(u_n)$.

5. $\sum(x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1, +\infty[$)
$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$
$\sum(y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée ; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne
$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

Partie B.

1. On a
$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.

2. (a) $t \mapsto \frac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

   (b) Une intégration par paties donne

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^b + 4n\int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n\left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

   Les différents termes admettent une limite quand $b \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

   (c) On a ainsi $\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une séries à termes > 0, on est dans le cas de la partie A avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.

3. (a) On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).

   (b) α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha,\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On est dans le cadre de la partie A (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha + 1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha + 1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha + 1 < 1$ et divergence si $\alpha + 1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

   (c) On a

$$\forall x \in [-1,1],\ |a_n x^n| \leq |a_n|$$

   On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1,1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

   (d) On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de $A.1$ pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. $(|a_n|)$ n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.

   (e) On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha - k|}{k+1}\right)$$

   Or, on remarque que (pour $k \geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Mais d'après 3.b, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certian rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.
Si $x \in [0,1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x \in [0,1], \ \left|\sum_{k\geq n} a_k x^k\right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum(a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ et S est donc continue sur $[0,1]$. Comme en question c, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

(b) Dans un espace de dimension k, une famille orthonormale a au plus k éléments (car elle est libre) et il y en a une de k éléments (existence de b.o.n.). Ainsi, l'entier q convient ssi $q-p \in [0..n-p]$ c'est à dire $q \in [p..n]$ (le cas $q=p$ étant discutable car il n'y a alors rien à ajouter).
Soient $i, j \in [1..q]$; par symétrie des rôles, on peut supposer $i \leq j$. On distingue alors trois cas.
- Si $i \leq j \leq p$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$ par hypothèse.
- Si $i \leq p < j$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = 0$ ($x_i \in F$, $x_j \in F^\perp$, $y_i \in G$ et $y_j \in G^\perp$).
- Si $p+1 \leq i \leq j$ alors $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = \delta_{i,j}$ (familles orthonormées).
On a ainsi prouvé que
$$\forall i, j \in \{1, \dots, q\},\ \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$$

(c) Pour $q = n$, on est amené au cas de la question 2. L'automorphisme orthogonal trouvé convient a fortiori si on se limite aux p premiers vecteurs.

4. Soit r le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$. Si $r = 0$ alors les x_i sont tous nuls, les y_i le sont donc aussi ($\forall i,\ \|x_i\| = \|y_i\|$) et on peut choisr l'application identique pour f. On suppose donc que $r \geq 1$.
Quitte à renuméroter, on peut supposer que $(x_1, \dots, x_r)$ est libre. La question 1 montre que $(y_1, \dots, y_r)$ est libre. Notons que la famille $(y_1, \dots, y_p)$ est aussi de rang r (en effet, les x et y jouent des rôles symétriques et on a une équivalence en question 1). Les espaces $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_r)$ ont ainsi même dimension.
En procédant comme à la question 3.c, on trouve un automorphisme orthogonal f tel que $\forall i \in [1..r],\ f(x_i) = y_i$ et $f(F^\perp) = G^\perp$.
Soit alors $i \geq r+1$; il existe des scalaires λ_k tels que $x_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k$ et
$$f(x_i) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k y_k$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} \forall j \in [1..r],\ \langle f(x_i) | y_j \rangle &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle y_k | y_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle x_k | x_j \rangle \\ &= \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \langle y_i | y_j \rangle \end{aligned}$$
On a ainsi $f(x_i) - y_i \in G^\perp$. Mais par ailleurs, $f(x_i) - y_i \in G$ ($x_i \in F$ et $f(x_i) \in f(F) = G$; $y_i \in G$). Finalement, $f(x_i) - y_i = 0$, ce qu'il restait à prouver.