Devoir Maison
Séries Entieres

CCP 2021

Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathcal{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Ce problème est composé de trois **parties** indépendantes.

Dans la **Partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la **Partie II** est de construire un logarithme complexe.

Enfin, la **Partie III** permet d'obtenir un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1, dans le cas $\alpha \in]0, 1[$.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q6. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q7. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas* $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\alpha \in]1, +\infty[$.

Q8. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q9. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q10. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

Q11. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer* f_α *à* f_1.

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

Q12. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{f_\alpha(1)}$.

Q13. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.
Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II - Un logarithme complexe

Q14. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q15. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q16. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q17. Prouver que g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q18. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q19. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Partie III - Un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, dans le cas où $\alpha \in]0,1[$

Dans toute cette partie, on suppose que $\alpha \in]0,1[$. L'objectif est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.

Q20. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

Q21. On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall s \in \mathbf{R}_+^*, \Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.
Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$.

Q22. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Q23. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t \leq f_\alpha(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Q24. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

CCINP 2021 – Corrigé

Partie I

Q6. $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{si } |z|>1 \end{cases}$ donc $R=1$.

Q7. D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$. La série converge en 1 $\iff$ $\alpha>1$ (exemple de Riemann) et en $-1 \iff \alpha>0$ (CSSA). Donc $\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \in]-\infty,0] \\ [-1,1[& \text{si } \alpha \in]0,1] \\ [-1,1] & \text{si } \alpha \in]1,+\infty[\end{cases}$

Q8. Pour $x \geq 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x) \geq 0$.
Pour $x \leq 0$, la série satisfait les hypothèses du CSSA donc sa somme est du signe de son 1er terme : $f_\alpha(x) \leq 0$.

Q9. D'après le cours, $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et $f_1(x) = -\ln(1-x)$.
Par le théorème de dérivation des SE, $f_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x} f_{-1}(x)$ donc $f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

Q10. Pour $\alpha>1$, la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Q11. $\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \frac{x^n}{n}$ donc $f_\alpha(x) \geq f_1(x)$. Or $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

Q12. G_α converge en $x=1$ donc $1 \in \mathcal{D}_\alpha$ *ie* $\alpha>1$ et $G_\alpha(1)=1$ donc $\lambda f_\alpha(1)=1$.

Q13. X_α admet une espérance $\iff$ G_α est dérivable en 1 $\iff$ $\alpha>2$ et dans ce cas, $G_\alpha'(x) = \lambda f_\alpha'(x) = \frac{\lambda}{x} f_{\alpha-1}(x)$.
Donc $E(X_\alpha) = G_\alpha'(1) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$.

Partie II

Q14. Pour $x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n}$

Q15. $R_S = 1$ et pour $x \in]-1,1[,\ \exp(S(x)) = 1+x$.

Q16. $R_g = \frac{1}{|z_0|} R_S = \frac{1}{|z_0|}$.

Q17. D'après le théorème de dérivation des SE, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g, R_g[\supset [0,1]$ et $g'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = \frac{z_0}{1+tz_0}$.

Q18. D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(t) = g'(t)h(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

Q19. On remarque que la fonction $z : t \mapsto 1+tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus, $z(0)=1=h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales. En $t=1$, on obtient $h(1) = \exp(S(z_0)) = z(1) = 1+z_0$.

Partie III

Q20. $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable sur $]0,1]$.
$\forall t \geq 1,\ 0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq e^{t\ln x}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln x < 0$.

Q21. On effectue le changement de variable $u = -t\ln x$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$:
$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{-\alpha} e^{-u}\, \mathrm{d}u = (-\ln x)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)$.

Q22. $t \mapsto x^t = e^{t\ln x}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont décroissantes positives sur $\mathbb{R}_+^*$ donc aussi leur produit.

Q23. $\forall t \in [n, n+1],\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$ donc en intégrant sur $[n, n+1]$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$.
On somme les 1$^{\text{res}}$ inégalités pour $n \in \mathbb{N}$ et les 2$^{\text{es}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient le résultat attendu.

Q24. $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha < 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$. En divisant par ce même équivalent et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{\sim} (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.