Devoir Maison
Suites et Séries de fonctions

Concours Commun INP 2022
Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Intégrales de Gauß et théorème de Moivre-Laplace

Présentation
Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $p \in [0,1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \frac{1}{2}$.
La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact de fonction gaussienne dite « intégrale de Gauß ». La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Q 1. Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \qquad \text{et :} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauß

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauß :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Q 6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q 5** que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge et donner sa limite.

Q 7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

Q 8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}.$$

Q 9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Partie III – Calcul d'une majoration

Q 10. Montrer qu'il existe une fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et un réel $M \geqslant 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x + g(x)}, \qquad \text{et :} \quad |g(x)| \leqslant M x^3.$$

Q 11. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k-n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}.$$

Q 12. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2} + 1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que : $|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3} (k - n - 1)^4$, et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

Concours Commun INP 2022

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

(corrigé)

Intégrales de Gauß et théorème de Moivre-Laplace

Partie I – Convergence d'une suite

Q 1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $1-t^2 \in [0,1]$. On en déduit que l'application $x \mapsto (1-t^2)^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$; comme $\frac{m+1}{2} \geqslant \frac{m}{2}$, on en déduit :

$$\forall t \in [0,1], \quad \left(1-t^2\right)^{\frac{m+1}{2}} \leqslant \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}},$$

et donc, par croissance de l'intégrale :

$$I_{m+1} \leqslant I_m,$$

ce qui démontre que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{m+2} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m+2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties cette dernière intégrale :

- en dérivant l'application $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$, qui est de classe C^1 sur $[0,1]$ et de dérivée $t \mapsto -2t\left(\frac{m}{2}+1\right)(1-t^2)^{\frac{m}{2}}$;
- en intégrant l'application $t \mapsto 1$, qui est continue sur $[0,1]$, et dont une primitive est $t \mapsto t$.

On a alors :

$$I_{m+2} = \left[t\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2t^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t$$

Comme $\frac{m}{2}+1 \geqslant 1 > 0$, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$ est nulle en 1. Le terme entre crochets s'annule donc, et on a :

$$\begin{aligned}
I_{m+2} = (m+2)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t &= (m+2)\int_0^1 \left((t^2-1)+1\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t \\
&= -(m+2)\left[\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \mathrm{d}t + \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t\right] \\
&= -(m+2)I_{m+2} + (m+1)I_m.
\end{aligned}$$

On en déduit : $(m+3)I_{m+2} = (m+2)I_m$, puis :

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q 3. Nous allons démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\mathrm{P}_n : \text{« } I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}, \text{ et : } I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \text{ »}$$

par récurrence sur n.

Pour $n=1$, on a par un calcul direct :

$$I_{2\times 1} = I_2 = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right) \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

tandis que, par définition des $a_{k,n}$:

$$\frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\times 3}\cdot\frac{2^3}{\sqrt{2}\binom{2}{1}} = \frac{2}{3},$$

donc : $I_{2\times 1} = \dfrac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}}$. Pour le calcul de :

$$I_{2\times 1-1} = I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

une stratégie (qui n'est pas la seule : on peut aussi astucieusement intégrer par parties) est d'effectuer le changement de variable $\theta = \arcsin(t)$ (on l'a choisi pour avoir : $1-t^2 = 1-\sin(\theta)^2 = (\cos(\theta))^2$). Il est licite parce que l'arc sinus définit une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,1[$, à valeurs dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, et donc :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \\ = \left[\frac{\theta+\sin(2\theta)/2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

tandis que :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^3}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{4},$$

donc : $I_{2\times 1-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1}$. On a donc montré :

$$I_{2\times 1} = \frac{\sqrt{2\times 1}}{2(2\times 1+1)a_{1,1}}, \quad I_{2\times 1-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}a_{1,1},$$

d'où P_1. On a initialisé la propriété à démontrer.
À présent, soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. D'après la question précédente (avec $m = 2n$), on a :

$$I_{2(n+1)} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}.$$

On aimerait montrer que c'est égal à $\frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}$. Cela nécessite préalablement de comprendre comment faire apparaître $a_{n+1,n+1}$, alors que nous avons $a_{n,n}$ ci-dessus. Trouvons donc une relation entre $a_{n+1,n+1}$ et $a_{n,n}$. Pour cela, remarquons que :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

et donc :

$$a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{2^{2n+3}}{\sqrt{2(n+1)}}a_{n+1,n+1},$$

ou encore, après simplifications :

$$a_{n,n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}a_{n+1,n+1}, \tag{$*$}$$

donc, en reprenant le calcul de $I_{2(n+1)}$ ci-dessus :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\cancel{2}(n+1)}{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{2\cancel{n}} \cdot \cancel{(2n+1)}}{2\cancel{(2n+1)} \cdot \cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}a_{n+1,n+1}} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}.$$

Encore en utilisant la question précédente (cette fois avec $m = 2n-1$) et $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)-1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n-1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} &\overset{(*)}{=} \frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{2}(n+1)} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\cancel{n}}} \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{n}(n+1)}}{\cancel{2n+1}} a_{n+1,n+1} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1}. \end{aligned}$$

On a donc montré, ayant supposé P_n :

$$I_{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}, \quad I_{2(n+1)-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}} a_{n+1,n+1},$$

d'où P_{n+1}, ce qui achève l'hérédité. Par principe de récurrence, on a donc le résultat voulu pour tout entier $n \geqslant 1$.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a montré dans la première question que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante. Donc :

$$I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}.$$

En principe, il suffit de diviser par $I_{2n} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ pour avoir le résultat voulu, à condition de bien justifier que c'est une quantité strictement positive. C'est vrai par propriété de séparation de l'intégrale, étant donné que l'application $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi $I_{2n} > 0$, et diviser par I_{2n} donne :

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

Or, d'après la question **Q 2** : $\dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$, et d'après la question précédente :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n} \times \frac{2(2n+1)a_{n,n}}{\sqrt{2n}} = \frac{2(2n+1)\pi}{2n} \left(a_{n,n}\right)^2.$$

D'où le résultat voulu, en divisant par $\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} > 0$ dans l'encadrement ci-dessus :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.$$

Q 5. D'après l'encadrement de la question précédente, et le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 = 1$, et donc :

$$a_{n,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(ce qu'on pouvait aussi trouver grâce à la formule de Stirling). On a donc, pour tout n au voisinage de l'infini :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2 \cdot 2n} \cdot \sqrt{2\pi} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Remarque. Le changement de variable $t = \arcsin(\theta)$, déjà proposé dans la question **Q 2**, permet de démontrer qu'on a : $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^{2n+1} \mathrm{d}\theta$. On reconnaît les traditionnelles intégrales de Wallis, et l'équivalent asymptotique bien connu.

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauß

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{n}$ dans l'intégrale $I_{2n} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$. Il est licite, parce que l'application $t \mapsto t\sqrt{n}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. On a $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, et donc :

$$I_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} J_n,$$

donc :

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n},$$

et d'après la question **Q 5** :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où le résultat.

Q 7. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, c'est-à-dire tel que $n > t^2$, on a $t \in [0, \sqrt{n}[$ et donc :

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)}.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t^2.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) = -t^2$. Alors, par continuité de l'exponentielle en $-t^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = e^{-t^2}.$$

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto e^{-t^2}$.

Q 8. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à la fonction exponentielle à l'ordre 1 en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + x + x^2 \int_0^1 (1-t)e^{tx}\mathrm{d}t \geqslant 1 + x,$$

du fait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $(1-t)e^{tx} \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Déduisons-en l'inégalité demandée sur u_n. Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$. En prenant $x = -\frac{t^2}{n}$, on obtient : $1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}}$. Or ces quantités sont positives pour $t \in [0, \sqrt{n}]$ donc, en utilisant la croissance de l'application $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}.$$

De plus, $u_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$ (en effet : $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \iff 0 \geqslant -t^2 \geqslant -n \iff 0 \geqslant -\frac{t^2}{n} \geqslant -1 \iff 1 \geqslant 1 - \frac{t^2}{n} \geqslant 0$), donc l'encadrement de l'énoncé est vérifié pour $t \in [0, \sqrt{n}]$. Si $t \in]n, +\infty[$, on note que l'encadrement est trivial, car u_n est nulle sur cet intervalle et on a $e^{-t^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in]\sqrt{n}, +\infty[$: d'où le résultat.

Q 9. Nous allons montrer : $K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to+\infty} J_n$, grâce aux questions précédentes et au théorème de convergence dominée, dont nous récapitulons les hypothèses : pour tout $n \geqslant 1$, l'application u_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, et la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : t \mapsto e^{-t^2}$ qui est également continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après la question précédente :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |u_n(t)| = u_n(t) \leqslant e^{-t^2}. \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Vérifions que l'application $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est effectivement intégrable sur $[0, +\infty[$: elle est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, donc le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$; or elle est positive, et d'après le théorème des croissances comparées on a : $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Donc :

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

et la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car son exposant est $2 > 1$, donc par comparaison φ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.
Le théorème de convergence dominée s'applique donc. Ceci démontre d'une part que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, et d'autre part qu'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Faisons à présent le lien avec K. Tout d'abord, le changement de variable $u = \sqrt{2}t$ (choisi de sorte que : $t^2 = \frac{u^2}{2}$), licite parce que l'application $t \mapsto \sqrt{2}t$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, montre que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u.$$

Rappelons que la formule du changement de variable conserve la nature des intégrales. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Ensuite, le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale du membre de gauche montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge également, et est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ (on utilise la parité de l'intégrande). On en déduit d'une part que $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$ converge, et d'autre part, grâce à tout ce qui précède :

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

En définitive, on a bien montré qu'on a : $K = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} J_n$. Or, d'après la question **Q 6**, cette limite est égale à $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$. Par unicité de la limite :

$$K = 1.$$

Remarque. Grâce aux questions précédentes, la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ peut se démontrer rapidement sans le théorème de comparaison. En effet, comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, on sait que l'application $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est croissante, et donc qu'elle admet une limite soit finie, soit infinie. Mais elle ne peut être infinie ; sinon, par caractérisation séquentielle de la limite, la suite $\left(\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ aurait aussi une limite infinie, et ce n'est pas le cas d'après la question **Q 6**. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ doit être finie, ce qui prouve la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Partie III – Calcul d'une majoration

Q 10. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\frac{1-x}{1+x} > 0$, et on peut donc poser :

$$g(x) = 2x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien, pour cette définition de g :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)}.$$

De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2 en 0 :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - x^3\int_0^1 \frac{(1-t)^2 2!}{2!(1-tx)^3}\mathrm{d}t,$$

et :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\int_0^1 \frac{(1-t)^2 2!}{2!(1+tx)^3}\mathrm{d}t,$$

donc, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$g(x) = -x^3\int_0^1 (1-t)^2\left(\frac{1}{(1-tx)^3} + \frac{1}{(1+tx)^3}\right)\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $(t,x) \in [0,1]\times\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $1 - \frac{1}{2} \leqslant 1 - tx \leqslant 1$ et $1 \leqslant 1 + tx \leqslant 1 + \frac{1}{2}$, et donc :

$$\underbrace{\frac{1}{(1/2)^3} + \frac{1}{1^3}}_{=9} \geqslant \frac{1}{(1-tx)^3} + \frac{1}{(1+tx)^3} \geqslant \underbrace{\frac{1}{1^3} + \frac{1}{(3/2)^3}}_{=\frac{35}{27}}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, sans oublier de renverser l'inégalité du fait de la multiplication par $-x^3 \leqslant 0$:

$$-9x^3 \cdot \int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t \leqslant g(x) \leqslant -x^3 \cdot \frac{35}{27}\int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, étant donné que : $\int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$:

$$-3x^3 \leqslant g(x) \leqslant -\frac{35}{27\cdot 3}x^3.$$

On en déduit d'une part que g est négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et d'autre part qu'on a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad |g(x)| \leqslant \max\left(3, \frac{35}{27\cdot 3}\right)x^3,$$

d'où le résultat, en posant $M = \max\left(3, \frac{35}{27\cdot 3}\right) = 3$.

Remarque. Sans suivre l'indication de l'énoncé, on peut montrer plus rapidement l'existence de $M \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $|g(x)| \leqslant Mx^3$, ainsi : on remarque que l'application $x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ en tant que quotient de fonctions clairement continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{g(x)}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^3} = -\frac{2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1),$$

donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^3} = -\frac{2}{3}$, ce qui montre que $x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$ se prolonge en une application continue sur le SEGMENT $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ (nécessairement positif, puisqu'il majore une quantité positive) tel que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \quad \left|\frac{g(x)}{x^3}\right| \leqslant M,$$

d'où le résultat après multiplication par $x^3 > 0$. Pour $x = 0$, l'inégalité reste trivialement vraie, puisque $g(0) = 0$ et $Mx^3 = 0$.

Q 11. Soit $k \in [\![n+1, 2n]\!]$. On a :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{k}}{\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{n!}{(2n-k)!}\frac{n!}{k!}.$$

Or :

$$\frac{n!}{(2n-k)!} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} j}{\prod\limits_{j=1}^{2n-k} j} = \prod_{j=2n-k+1}^{n} j \overset{[i=n-j]}{=} \prod_{i=0}^{k-n-1}(n-i) = n\prod_{i=1}^{k-n-1}(n-i).$$

Pour comprendre les valeurs prises par l'indice du produit, notez que $2n-k+1 \leqslant j \leqslant n$ équivaut, après opérations élémentaires, à : $0 \leqslant n-j \leqslant -n+k-1$. De même :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{k} j} \overset{[i=j-n]}{=} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k-n}(n+i)} = \frac{1}{k\prod\limits_{i=1}^{k-n-1}(n+i)}.$$

Par conséquent, en reprenant le calcul plus haut :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{n-i}{n+i} \times \frac{n}{k} = \prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{1-\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}} \times \frac{n}{k},$$

d'où le résultat.

Q 12. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2}+1$. Appliquons la question **Q 10**, avec $x = \frac{i}{n}$, où $i \in [\![1, k-n-1]\!]$. C'est possible puisque, avec ces hypothèses sur i et k, on a bien $\frac{i}{n} \geqslant 0$ et :

$$\frac{i}{n} \leqslant \frac{k-n-1}{n} \leqslant \frac{3n/2+1-n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

On a alors, d'après cette question :

$$\prod_{i=1}^{k-n-1}\frac{1-\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n}} \leqslant \prod_{i=1}^{k-n-1} e^{-\frac{2i}{n}+g\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} i} \times e^{\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{-\frac{(k-n-1)(k-n)}{n}} \times e^{\sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)}.$$

Posons : $b_{k,n} = \sum\limits_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)$. On a alors, d'après ce qui précède et la question précédente :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{-\frac{(k-n-1)(k-n)}{n}} \times e^{b_{k,n}},$$

et il reste à montrer qu'on a bien : $|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}\,(k-n-1)^4$. Pour cela, on utilise l'inégalité triangulaire et la question **Q 10** encore une fois :

$$|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^{k-n-1} i^3 \leqslant \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^{k-n-1} (k-n-1)^3 = \frac{M}{n^3} \cdot (k-n-1)^3 \times (k-n-1),$$

la dernière majoration se justifiant parce qu'on somme $k-n-1$ fois le nombre $k-n-1$ (qui ne dépend pas de l'indice de sommation). Ainsi :

$$|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}\,(k-n-1)^4\,,$$

et :

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)},$$

ce qu'il fallait démontrer.