Devoir Maison
Déterminants

e3a - PSI - 2010

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder le partie B en admettant le résultat de la question $A.3.b$.
Soit n un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. On note respectivement I_n et O_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$, sa trace $\mathrm{Tr}(A)$ et son polynôme caractéristique est désigné par $P_A(X)=$ det(A-X.I)

Partie A.

1. Soient A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

$$\det(\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(D),\ \det(\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}) = 1 \ \text{ et } \ \det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}) = \det(A)$$

b. En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.

c. De la question précédente, déduire $\det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$.

2. Dans toute la suite de cette partie, A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors on a

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \in S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

b. En déduire que l'on a $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B.

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).
Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$R_A \ : \ X \mapsto AX \ \text{ et } \ L_A : \ X \mapsto XA$$

e3a - PSI - 2010
Un corrigé de l'épreuve B

Exercice 1.

Partie A.

1.a. Au vu de la question suivante, on ne doit pas mentionner un calcul de déterminant triangulaire par blocs. Pour la première relation ainsi que la seconde, on peut faire des développements successifs selon la première colonne (n fois). Pour la troisième, on développe cette fois successivement (n fois) par rapport à la dernière colonne.

1.b. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

puis d'utiliser la propriété de morphisme multiplicatif du déterminant pour obtenir, avec la question précédente,

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$$

1.c. En utilisant l'invariance du déterminant par transposition, on obtient alors

$$\det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et donc (avec la propriété de morphisme multiplicatif du déterminantet la question 1) $\det(M)\det(D) = \det(AD-BC)\det(D)$. Si D est inversible, on peut simplifier par $\det(D) \neq 0$ et obtenir

$$\det(M) = \det(AD-BC)$$

3.a. Soit S le spectre complexe de D (c'est un ensemble de cardinal fini $\leq n$). Si $x \notin S$ alors D_x est inversible et donc (question précédente) $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

3.b. Comme S est fini, il existe $r > 0$ tel que $]0, r[\cap S = \emptyset$. On a ainsi

$$\forall x \in]0, r[,\ \det(M_x) = \det(AD_x - BC)$$

Le passage au déterminant étant continu, on peut faire tendre r vers 0 pour obtenir

$$\det(M) = \det(AD-BC)$$

On a bien sûr utilisé $D_r \to D$ quand $r \to 0$ qui donne $M_r \to M$ et $AD_r - BC \to AD - BC$.

Partie B.

1. Il est important de prendre garde à l'ordre des vecteurs choisi pour la base canonique. A part cela, on doit juste exprimer $R_A(E_{i,j})$ ou $L_A(E_{i,j})$ et mettre les coordonnées en colonnes. Le calcul donne

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

2. On écrit les matrices précédentes par blocs

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix} \text{ et } Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de combiner ces matrices pour obtenir

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q^tA \end{pmatrix}$$

3.a. Comme cI_2 et $dI_2 - q^tA$ commutent, on peut utiliser la formule de la partie A :

$$\begin{aligned} \det(M_A) &= \det((aI_2 - q^tA)(dI_2 - q^tA) - bcI_2) \\ &= \det((ab - bc)I_2 - q(a+d)^tA + q^2({}^tA)^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\tilde{A}$ étant la transposée de la comatrice de A on a (formule de cours que l'on peut vérifier à la main pour cette matrice de taille 2)

$$A\tilde{A} = \det(A)I_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) &= \det(A\tilde{A} + q^2A^2 - q(a+d)A) \\ &= \det((ad - bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2) \end{aligned}$$

Le déterminant étant invariant par transposition, on conclut que

$$\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$$

3.b. On a

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = \det(\begin{pmatrix} (q-1)(qa-d) & b(q-1)(q+1) \\ c(q-1)(q+1) & (q-1)(qd-a) \end{pmatrix})$$

Par multilinéarité du déterminant on a ainsi

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = (1-q)^2\det(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix})$$

et avec la question précédente,

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix})$$

3.c. On a maintenant

$$\det(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix}) = (1+q)^2(ad-bc) - q(a+d)^2 = (1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2$$

et la question précédente donne

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$$

4.a. $P_A(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ et donc $\mathrm{Tr}(A) = \alpha+\beta$ et $\det(A) = \alpha\beta$. La question précédente donne alors

$$\det(M_A) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q)^2\alpha\beta - q(\alpha+\beta)^2) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q^2)\alpha\beta - q\alpha^2 - q\beta^2)$$

Il reste à remarquer que $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (q-1)^2\alpha\beta(q\beta-\alpha)(q\alpha-\beta)$ et à développer le dernier produit pour conclure que

$$\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$$

4.b. On travaille en deux temps.

- S'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = qBA$ alors $(R_A - qL_A)(B) = 0$ et donc $R_A - qL_A$ est non inversible. Son déterminant est nul et donc $P_A(q\alpha) = 0$ ou $P_A(q\beta) = 0$ c'est à dire $q\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ ou $q\beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors α et β sont non nuls (0 non valeur propre de A) et $q\alpha \neq \alpha$, $q\beta \neq \beta$ ($q \neq 1$). La condition devient alors $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
  Finalement, on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
- Réciproquement, si cette condition a lieu alors $\det(M_A) = 0$ et $R_A - qL_A$ n'est pas inversible. Il existe $B \neq 0$ dans son noyau et ceci s'écrit $AB = qBA$.

5. Distinguons trois cas.

- 0 est valeur propre simple de A. Dans ce cas, il existe une autre valeur propre complexe $\alpha \neq 0$ et A est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, 0)$ (deux sous-espaces propres qui sont des droites).
- 0 est valeur propre double. Dans ce cas, $P_A = X^2$ et $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme $A \neq 0$, il existe un vecteur colonne E_1 tel que $E_2 = AE_1 \neq 0$. Si $c_1E_1 + c_2E_2 = 0$ alors (on compose par A) $c_1E_2 = 0$ et donc $c_1 = 0$ (car $E_2 \neq 0$) puis $c_2E_2 = 0$ et donc $c_2 = 0$. La famille (E_1, E_2) est libre et est une base de $\mathbb{R}^2$ (identifié à l'espaces des matrices unicolonnes). Dans cete base, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est donc semblable à cette matrice.
- Si 0 n'est pas valeur propre de A alors $\det(A) \neq 0$ et $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$. Comme $q \neq 1$, on a $\alpha \neq \beta$ et on a deux valeur propres. A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta)$.

1. Déterminer les matrices de R_A et L_A dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $R_A - qL_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

a. $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2 A - q(a+d)I_2)$,

b. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A)\det(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix})$,

c. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$.

4. On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

a. Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.

b. A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$
- on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.