DS Réduction (4h)

Exercice 1:

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème 1: Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, E_n désigne le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On note Φ l'application de E vers E définie par : $\forall P \in E, \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

2.1. Linéarité de Φ

2.1.1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

2.1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.

Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on pose $\varepsilon_k = X^k$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n, c'est sa base canonique.

2.1.3. Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

2.2. Étude de l'endomorphisme Φ_3

2.2.1. Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

2.2.2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_3 ?

2.2.3. L'endomorphisme Φ_3 est-il diagonalisable ?

2.3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$ et on note P_n le polynôme dérivé $n-$ième du polynôme U_n, c'est-à-dire $P_n = U_n^{(n)}$. On convient enfin que $U_0 = P_0 = 1$.

2.3.1. Établir que, pour tout entier naturel n, $\quad (X^2 - 1)U_n' - 2nXU_n = 0$.

2.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $(n+1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que

$$\Phi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

2.3.3. Montrer alors que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E_n, formée de vecteurs propres de Φ_n. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

2.4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1. Montrer que si $\Phi(P) = n(n+1)P$, alors $p = n$.

2.4.2. Ici on prend $p = n$, on écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

(i) Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$.

(ii) En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment à l'aide de α_n.

2.4.3. Que peut-on alors dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\left(\Phi - n(n+1)\mathrm{id}_E\right)$? Ce résultat était-il prévisible sans calcul ?

PROBLÈME 2 Blocs de Jordan

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les matrices J_λ, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k, tel que $M^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de M.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ.

Q30. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire J_0^2.
Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p. En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p.

Q31. Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Q32. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note v l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ une base de V, que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

Q33. Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$?

Q34. En déduire que le polynôme caractéristique de v divise le polynôme caractéristique de u_λ et que $e_p \in V$.

Q35. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X.$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

Q36. Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, alors $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S).

Q37. On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$.

Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$.

Q38. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$.
Admis

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.

Q39. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$ est constante.

En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ où $X_0 \in E$.

Exercice 2:

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum_{k=0}^{r} q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.
   Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$.
   Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que : $\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) \mathrm{d}t.$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_n.
   Déterminer A et A^{-1}.
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1}.
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n.
   À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
   On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1}.
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f.

Corrigé

Exercice 1: CNC 2023 (Non disponible)

Problème 1: CNC 2023 (Non disponible)

Problème 2: CCINP 2024

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Q.30 On a $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} \forall j \in [\![1, p-1]\!], & u_0(e_j) = e_{j+1} \\ & u_0(e_p) = 0 \end{cases}$, puis $\begin{cases} \forall j \in [\![1, p-2]\!], & u_0(e_j) = e_{j+2} \\ & u_0(e_p) = 0 \\ & u_0(e_{p-1}) = 0 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

De manière analogue :

$$\boxed{J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_0^p = 0_p.}$$

On en déduit donc que $\boxed{J_0 \text{ est nilpotente d'indice } p.}$

Q31. J_λ est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Et u_λ et J_λ ont même spectre donc

$$\boxed{Sp(u_\lambda) = \{\lambda\}.}$$

De plus $\quad J_\lambda - \lambda I_p = J_0 \quad$ et le rang de J_0 vaut $p-1$ donc, par le théorème du rang :

$$dim(\ker(J_\lambda - \lambda I_p)) = p - (p-1) = 1.$$

Il est clair que e_p est un vecteur non nul tel que $\quad u_\lambda(e_p) = \lambda e_p \quad$ donc

$$\boxed{\text{Le sous espace propre de } u_\lambda \text{ associé à } \lambda \text{ est } \mathrm{Vect}(e_p).}$$

Q32. On remarque que : $\quad u_\lambda = u_0 + \lambda Id_{\mathbb{R}^p}, \quad$ donc $\quad \forall X \in E, \quad u_\lambda(X) = u_0(X) + \lambda X.$
Soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Supposons V stable par u_λ. $\quad$ On a alors

$$\forall X \in V, \quad u_0(X) = \underbrace{u_\lambda(X)}_{\in V} - \underbrace{\lambda X}_{\in V} \quad \text{donc} \quad u_0(X) \in V.$$

  Donc V est stable par u_0.
- On montre de même que si V est stable par u_0 alors V est stable par u_λ.
- Conclusion : $\boxed{V \text{ est stable par } u_\lambda \text{ si et seulement si } V \text{ est stable par } u_0.}$

Q33. La matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$ est une matrice par blocs de la forme :

$$W = \begin{pmatrix} A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) & B \in \mathscr{M}_{p-k,k}(\mathbb{R}) \\ \\ 0 \in \mathscr{M}_{k,p-k}(\mathbb{R}) & D \in \mathscr{M}_{p-k,p-k}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de v dans la base $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$.

Q34. Notons P le polynôme caractéristique de u_λ et Q celui de v. On a pour tout réel x

$$P(x) = det(xI_p - W) = det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ \\ 0 & xI_{p-k} - D \end{pmatrix} = det(xI_k - A) \times det(xI_{p-k} - D) = Q(x) \times R(x).$$

Or $\quad det(xI_k - A) = Q(x) \quad$ et $\quad R$ est un polynôme.
Donc $\quad \boxed{\text{le polynôme caractéristique de } v \text{ divise celui de } u_\lambda.}$

On en déduit que $\quad Sp(v) = \{\lambda\}. \quad$ Si X est un vecteur propre de v associé à λ alors $\quad X \in V \quad$ et $v(X) = \lambda X \quad$ donc $\quad u_\lambda(X) = \lambda X \quad$ donc X est est un vecteur propre de u_λ associé à λ. Et comme l'espace propre de u_λ associé à λ est de dimension 1 engendré par e_p, $\quad X \in Vect(e_p). \quad$ Puisque X est non nul, nécessairement

$$\boxed{e_p \in V}$$

Q35. Supposons par l'absurde qu'il existe deux sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^p$, stables par u_λ, non réduits à $\{0\}$ et tels que $\quad V \oplus W = \mathbb{R}^p$.
Comme ces sous espaces sont non nuls, d'après **Q34.**, ils contiennent tous deux e_p et cela contredit le fait qu'ils soient en somme directe.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il n'existe pas de sous espaces vectoriels } V \text{ et } W \text{ de } \mathbb{R}^p\text{, stables par } u_\lambda\text{, non réduits à } \{0\} \\ \text{et tels que} \quad V \oplus W = \mathbb{R}^p.\end{array}}$$

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

Q36. Par hypothèse X_0 est un vecteur non nul tel que $\quad J_\lambda X_0 = \lambda X_0$.
La fonction $\tilde{X}$ est bien de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_0 = e^{\lambda t} \lambda X_0 = e^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda \tilde{X}(t).$$

$$\boxed{\text{Donc } \tilde{X} \text{ est solution particulière de } (S).}$$

Q37. Par opérations sur les fonctions de classe C^1, la fonction φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k.$$

Par ailleurs, $\quad J_\lambda = J_0 + \lambda I_p \quad$ donc

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad J_\lambda \varphi(t) &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^{k+1} + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \quad \text{car, avec } \textbf{Q30.}, \quad J_0^p = 0_p.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \varphi(t) = J_\lambda exp(tJ_\lambda)$$

Comme $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ commute avec J_0, J_λ commute aussi avec $exp(tJ_\lambda)$ et

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda exp(tJ_\lambda) = exp(tJ_\lambda) J_\lambda.}$$

Q38. D'après **Q30.**, $\quad \forall\, k \geqslant p, \quad J_0^k = 0_p. \quad$ Donc on peut écrire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$$

et cette somme est en fait une somme finie. $\quad$ On a aussi :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad exp(-tJ_\lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} J_0^k.$$

On peut donc calculer en manipulant en réalité des sommes finies :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad exp(tJ_\lambda) \times exp(-tJ_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{t^\ell}{\ell!} J_0^\ell \; \frac{(-t)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} J_0^{k-\ell} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \right) J_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(1 + (-1)\right)^k J_0^k \\ &= I_p \quad \text{car les termes autres que pour } k = 0 \text{ sont nuls.}\end{aligned}$$

On en conclut que, pour tout réel t,

$$\boxed{\text{la matrice } exp(tJ_\lambda) \text{ est inversible d'inverse } exp(-tJ_\lambda).}$$

Q39. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $Y : t \longmapsto exp(-tJ_\lambda)X(t)$. On a donc, par **Q38.**, $X : t \longmapsto exp(tJ_\lambda)Y(t)$.
La fonction φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on déduit que X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Supposons donc X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et , par **Q37.** :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) &= -\varphi'(-t)X(t) + \varphi(-t)X'(t) \\ &= -exp(-tJ_\lambda)J_\lambda X(t) + exp(-tJ_\lambda)X'(t) \\ &= exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)). \end{aligned}$$

- Si X est solution de (S), on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = 0,$ et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, Y est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si Y est constante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, \quad exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)) = 0.$ Comme la matrice $exp(-tJ_\lambda)$ est inversible, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) - J_\lambda X(t) = 0$ et X est solution de (S).
- Conclusion : $\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } Y \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$

Or Y est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = X_0.$
Ce qui précède et **Q38.** permettent de conclure que

$$\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } \quad \exists\, X_0 \in E \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = exp(tJ_\lambda)X_0.}$$

Exercice 2 (e3a 2022)

1. On reconnaît une somme géométrique. Si $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{r} q^k = \frac{q^{r+1}-1}{q-1}.$$

   Si $q = 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k = r+1$.

2. On a : $X^p - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$, ce qui montre que le quotient dans la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X-1$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$, tandis que le reste est nul.

3. L'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x P(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $x \mapsto P(x)$ s'annulant en 1. En particulier, comme une primitive d'un polynôme est un polynôme, l'application $x \mapsto \displaystyle\int_1^x P(t)\mathrm{d}t$ est polynomiale : notons P_0 le polynôme associé. Comme il s'annule en 1 d'après ce qu'on vient de rappeler, il est divisible par $X-1$: soit, donc, $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_0 = (X-1)Q$. Alors : $\deg(Q) = \deg(P_0) - 1 = (\deg(P)+1) - 1 = \deg(P) \leqslant n$, donc $Q \in E_n$, et on a :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{P_0(x)}{x-1} = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t,$$

   d'où le résultat. Le polynôme Q est évidemment unique, vu qu'il est défini de manière unique comme le quotient de P_0 par $X-1$.

4. L'application f est linéaire, par linéarité de l'intégrale. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme de E, il s'agit de montrer : $\forall P \in E_n,\ f(P) \in E_n$. Or nous avons démontré ci-dessus que si $P \in E_n$, alors : $\deg(Q) \leqslant n$, d'où le résultat. Ainsi f est un endomorphisme de E_n.

5. Il s'agit de montrer que f admet une application réciproque, et de l'expliciter. Soit $Q \in E_n$. Nous allons trouver la réciproque de f en résolvant l'équation $Q = f(P)$ d'inconnue $P \in E_n$. On la résout par analyse et synthèse. Pour cela, on note que si cette équation est vérifiée alors, après multiplication par $x-1$ et dérivation, on a :

$$\forall x \neq 1, \quad P(x) = Q(x) + (x-1)Q'(x).$$

Par conséquent, s'il y a une solution, alors ce doit être : $P = Q + (X-1)Q'$ (on passe des applications polynomiales aux polynômes en notant que si l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \neq 1$, alors le polynôme $P - (Q + (X-1)Q')$ admet pour racines tous les réels différents de 1, ce qui fournit une infinité de racines; ce n'est possible que si $P - (Q + (X-1)Q') = 0_{E_n}$).
Réciproquement, le polynôme $P = Q + (X-1)Q'$ convient, puisqu'on peut intégrer ci-dessous en reconnaissant la dérivée d'un produit :

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x (Q(t) + (t-1)Q'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[(t-1)Q(t)\right]_1^x = \frac{(x-1)Q(x)}{x-1} = Q(x),$$

d'où : $f(Q + (X-1)Q') = Q$.
En résumé, on a montré que pour tout $Q \in E_n$, l'équation $Q = f(P)$ admet une unique solution $P \in E_n$. Cela montre d'une part que f est bijective, puisque tout élément de E_n admet exactement un antécédent, et d'autre part que son application réciproque est définie par :

$$\forall Q \in E_n, \quad f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q' = ((X-1)Q)'.$$

6. Pour déterminer A et A^{-1}, il suffit de déterminer les coordonnées (dans la base canonique) de $f(X^k)$ et $f^{-1}(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Or :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x = \frac{1}{k+1}\,\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i,$$

donc : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} X^i$, et :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad f^{-1}(X^k) = X^k + (X-1)kX^{k-1} = (k+1)X^k - kX^{k-1},$$

tandis que pour $k = 0$ on a : $f^{-1}(1) = 1$. On en déduit :

$$A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

7. Comme A et A^{-1} sont des matrices triangulaires, leurs valeurs propres se lisent sur la diagonale. On en déduit :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \left\{\frac{1}{k+1} \mid k \in [\![0,n]\!]\right\}, \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A^{-1}) = \{k+1 \mid k \in [\![0,n]\!]\}.$$

Sans surprise, les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses de celles de A. À comparer avec le résultat de la question 11, qui peut se traiter indépendamment de celle-ci.

8. Les matrices A et A^{-1} sont d'ordre $n+1$ et admettent $n+1$ valeurs propres distinctes : elles sont donc diagonalisables (et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1).

9. On va utiliser la caractérisation des ordres de multiplicités avec les dérivées. C'est pertinent puisque α est clairement racine de $(X-1)Q$ si c'est racine de Q, et que $f^{-1}(Q) = ((X-1)Q)'$ est sa dérivée.
Supposons d'abord $\alpha = 1$. Comme 1 est racine d'ordre de multiplicité k de Q, on peut écrire : $Q = (X-1)^k R$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$ qui ne s'annule pas en 1, et donc : $(X-1)Q = (X-1)^{k+1}R$, avec R ne s'annulant pas en 1. On en déduit que 1 est racine de $(X-1)Q$, d'ordre de multiplicité $k+1$, et donc 1 est racine de $((X-1)Q)'$ d'ordre de multiplicité k.
Supposons à présent $\alpha \neq 1$. Dans ce cas, $(X-1)Q$ admet α pour racine avec ordre de multiplicité k. Alors :

— si la racine est simple, c'est-à-dire si $k = 1$, alors $((X-1)Q)'(1) \neq 0$, donc α n'est pas racine de $f^{-1}(Q)$;

— si $k \geqslant 2$, alors α est racine de $f^{-1}(Q)$, d'ordre de multiplicité $k - 1$.

On peut unifier ces deux cas, en prenant pour convention qu'une racine d'ordre de multiplicité 0 n'est pas une racine.

En résumé :

— si $\alpha = 1$, alors $f^{-1}(Q)$ admet 1 pour racine avec le même ordre de multiplicité ;

— si $\alpha \neq 1$, alors l'ordre de multiplicité de α comme racine de $f^{-1}(Q)$ est $k-1$ (et en particulier ce n'est pas une racine si $k = 1$).

10. On rappelle que les valeurs propres de f^{-1} sont de la forme $k+1$ avec $k \in [\![0,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Déterminons le sous-espace propre de f^{-1} associé à $k+1$, en résolvant l'équation $f^{-1}(Q) = (k+1)Q$ d'inconnue $Q \in E_n$.
Si $f^{-1}(Q) = (k+1)Q$, alors en particulier $f^{-1}(Q)$ et Q ont les mêmes racines complexes, avec les mêmes ordres de multiplicité (vu que $f^{-1}(Q)$ et $(k+1)Q$ sont égaux ; il est évident que Q et $(k+1)Q$ ont les mêmes racines). Or, si $\alpha \neq 1$, alors la question précédente montre que l'ordre de multiplicité d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ n'est pas la même pour $f^{-1}(Q)$ et Q si $\alpha \neq 1$; on en déduit que 1 est l'unique racine dans $\mathbb{C}$ de Q, sous peine de contradiction. Comme tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ par le théorème fondamental de l'algèbre, on en déduit que Q est de la forme : $Q = c(X-1)^\ell$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in [\![0,n]\!]$. Or :

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(c(X-1)^\ell\right) = (k+1)c(X-1)^\ell &\iff \left((X-1)c(X-1)^\ell\right)' = c(k+1)(X-1)^\ell \\ &\iff c(\ell+1)(X-1)^\ell = c(k+1)(X-1)^\ell \\ &\iff c(\ell+1) = c(k+1), \end{aligned}$$

si et seulement si : $\ell = k$, ou : $c = 0$ (qui implique $Q = 0_{E_n}$). Cette étude montre que si $f^{-1}(Q) = (k+1)Q$, alors : $Q \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((X-1)^k\right)$, et remonter les équivalences ci-dessus permet de s'assurer que la réciproque est vraie (on peut aussi invoquer un argument dimensionnel pour transformer cette inclusion en une égalité : on a en effet déjà justifié que les sous-espaces propres sont de dimension 1). Ainsi :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((X-1)^k\right).$$

11. On a clairement, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $P \in E_n$:

$$\begin{aligned} P \in \ker\left(f - \frac{1}{k+1}\mathrm{Id}_{E_n}\right) \iff f(P) = \frac{1}{k+1}P &\iff P = f^{-1}\left(\frac{1}{k+1}P\right) = \frac{1}{k+1}f^{-1}(P) \\ &\iff f^{-1}(P) = (k+1)P \\ &\iff P \in \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right), \end{aligned}$$

donc : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\ker\left(f - \dfrac{1}{k+1}\mathrm{Id}_{E_n}\right) = \ker\left(f^{-1} - (k+1)\mathrm{Id}_{E_n}\right)$. D'où le résultat.