

## Devoir Surveillé (4h)

### Algèbre Linéaire

#### Exercice 1

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $J = ]-1, +\infty[$  à valeurs réelles.  
Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , on définit les fonctions  $f_k$  sur  $J$  par :

$$\forall x \in J, f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.

(1.1) Soient  $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  des réels tels que  $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$  soit la fonction nulle.

Démontrer que  $a_{-1} = 0$ .

(1.2) Démontrer alors que la famille  $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  est libre.  
On note  $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ .

(1.3) En déduire la dimension de  $E$ .

2. On note  $u$  l'application qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $g$  définie sur  $J$  par :

$$\forall x \in J, g(x) = (1+x)f'(x).$$

(2.1) Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , les images de  $f_k$  par  $u$ .

(2.2) Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

(2.3) Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

(2.4) Préciser  $u^{-1}(\{f_{-1}\})$ , l'ensemble des antécédents de  $f_{-1}$ .

(2.5) Déterminer la matrice  $M$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## Exercice 2

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q15.** Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_A = \det(XI_3 - A)$  de  $A$  et le décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Q19.** On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C}).$$

Exprimer  $D^{-1}AD$  à l'aide de la matrice  $B$ .

**Q20.**

Soit  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ . Calculer  $\Delta^{-1}A\Delta$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel fixé. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note  $V_n$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

**Q21.** Montrer que la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe  $V_n$ .

**Q22.** Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , montrer que  $f'_k \in V_n$ . En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de  $V_n$  et que sa matrice  $B_n$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

**Q26.** Pour quelles valeurs de  $n$  l'endomorphisme  $\varphi_n$  est-il un automorphisme de  $V_n$  ?

# Problème

## Notations et rappels

Dans tout le problème,  $\mathbb{R}$  désigne le corps des réels et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à  $n$  lignes et  $p$  colonnes ; pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

Si  $p = n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est noté simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels ; la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $I_n$ .

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $C_1(A), \dots, C_n(A)$  les colonnes de  $A$ , ce sont des éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ; par définition, le rang de la matrice  $A$  est la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  engendré par les vecteurs  $C_1(A), \dots, C_n(A)$ . Le rang de  $A$  se note  $\text{rg}(A)$ , on note aussi  $\text{Tr}(A)$  sa trace.

Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des réels, on note  $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  la matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui admet pour coefficients diagonaux les réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  pris dans cet ordre.

### 1<sup>ère</sup> Partie

1. Discuter le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  selon les valeurs de  $a, b, c$  et  $d$ .
2. Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que  $\text{rg}(A) = 0$  si et seulement si pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,j} = 0$ . En particulier, si  $A$  n'est la matrice nulle alors  $\text{rg}(A) \geq 1$ .
  - (b) Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{rg}(A) = n$ .
3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ; on désigne par  $f_A$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $A$ . Montrer que
$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im } f_A).$$
4. Soient  $U$  et  $V$  deux éléments non nuls de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ; on note  $u_1, \dots, u_n$  les composantes de  $U$  et  $v_1, \dots, v_n$  celles de  $V$ . On pose  $A = U^tV$ .
  - (a) Exprimer les coefficients de la matrice  $A$  à l'aide des  $u_k$  et des  $v_k$ .
  - (b) Que vaut la trace de  $A$  ?
  - (c) Exprimer les colonnes de  $A$  à l'aide de  $v_1, \dots, v_n$  et  $U$ .
  - (d) On suppose que  $U \neq 0$  et  $V \neq 0$  ; montrer que le rang de  $A$  est égal à 1.
5. On considère ici une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1.
  - (a) Montrer qu'il existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $C_{i_0}(A) \neq 0$ .
  - (b) Justifier que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe un réel  $\lambda_j$  tel que  $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$ .
  - (c) En déduire que  $A = X^tY$  où  $X = C_{i_0}(A)$  et  $Y$  est un élément non nuls de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à préciser.
  - (d) On suppose que  $A = X_0 {}^tY_0$  ; Trouver tous les couples  $(X_1, Y_1)$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tels que  $A = X_1 {}^tY_1$ .

### 2<sup>ème</sup> Partie

Soit  $A = U^tV$  une matrice de rang 1, où  $U$  et  $V$  sont deux éléments non nuls de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On pose  $\alpha = {}^tVU$  et  $W = ({}^tVV)U$ .

1. Calculer  $A^2$  en fonction du réel  $\alpha$  et de  $A$ .
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  la matrice  $A$  est-elle nilpotente ?
3. On suppose que  $A$  n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe  $\lambda$ , réel non nul, tel que la matrice  $\lambda A$  soit celle d'un projecteur.

# (corrigé)

## Exercice 1 BANQUE D'ÉPREUVES E3A 2021

1. (1.1) La fonction  $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$  est nulle, donc en isolant le terme de la somme correspondant à  $k = -1$  on a :

$$\forall x \in J, \quad a_{-1} \ln(1+x) = - \sum_{k=0}^p a_k f_k(x) = - \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{(1+x)^k}.$$

Le membre de droite tend vers  $-a_0$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (attention au fait que  $f_0 = 1$  ne tend pas vers 0 en l'infini, au contraire des autres fonctions  $f_k$ ). En particulier, c'est une limite finie. Pour que cette égalité soit vraie, il faut donc que  $a_{-1} \ln(1+x)$  ait une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui n'est possible que si  $a_{-1} = 0$  : d'où le résultat.

- (1.2) Pour montrer que la famille  $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  est libre, nous devons démontrer que la seule relation de dépendance linéaire entre ces fonctions est la relation de dépendance triviale. Or, d'après la question précédente, s'il existe  $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  tel que :  $\sum_{k=-1}^p a_k f_k = 0$ , alors  $a_{-1} = 0$ , ce qui nous donne une relation de la forme suivante (après multiplication par  $(1+x)^p$ ) :

$$\forall x \in J, \quad a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \dots + a_{p-1}(1+x) + a_p = 0.$$

La famille  $\left((1+X)^k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  est une famille de  $\mathbb{R}_p[X]$  échelonnée en degré, donc elle est libre. On en déduit que la relation ci-dessus implique :  $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = 0$ . Ainsi  $a_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , ce qui démontre ce qu'on voulait : la famille  $\mathcal{B}$  est libre. (Certes, on a utilisé la liberté d'une famille de polynômes, alors que la relation de dépendance ci-dessus est avec une famille d'applications polynomiales, mais passer de l'une à l'autre ne souffre d'aucune difficulté.)

*Remarque.* Une autre stratégie, pour montrer l'indépendance linéaire, est de constater que si  $i$  est l'indice du plus grand scalaire  $a_i$  non nul de la relation de dépendance ci-dessus, alors on a  $\sum_{k=0}^p a_k f_k(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{a_i}{(1+x)^i}$ , et on en déduit que la fonction  $\sum_{k=0}^p a_k f_k$  admet une limite infinie en  $-1$  (ou égale à  $a_0 \neq 0$  si  $i = 0$ ) : impossible s'il s'agit de la fonction nulle. Par l'absurde, on en déduit que tous les scalaires  $a_i$  sont nuls.

- (1.3) La famille  $\mathcal{B}$  engendre  $E$  par définition de  $E$ , et elle est libre d'après la question précédente. C'est donc une base de  $E$ , et on en déduit :  $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B}) = p + 2$ .
2. (2.1) Soient  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$  et  $x \in J$ . Par définition de  $u$ , on a :  $u(f_k)(x) = (1+x)f'_k(x)$ . Si  $k = -1$ , alors  $f'_{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$ , donc :  $u(f_{-1})(x) = 1$ , tandis que si  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  alors on a :  $f'_k(x) = -k(1+x)^{-k-1}$ , puis :  $u(f_k)(x) = -k(1+x)^{-k} = -kf_k$ . En conclusion :

$$u(f_{-1}) = 1 (= f_0), \quad \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad u(f_k) = -kf_k.$$

- (2.2) La linéarité de  $u$  est évidente par linéarité de la dérivation. De plus, la question précédente montre que pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , on a  $u(f_k) \in E$  (en effet les  $f_i$  engendrent  $E$ ), et comme la stabilité d'un espace vectoriel par une application linéaire équivaut à la stabilité vérifiée sur une base, on en déduit que  $u(f) \in E$  pour tout  $f \in E$ . Ainsi  $u$  est une application linéaire définie sur  $E$  et à valeurs dans  $E$ , donc c'est un endomorphisme de  $E$ .

(2.3) Déterminons le noyau de  $u$ . Soit  $f \in E$  tel qu'on ait :  $u(f) = 0_E$ . Cela signifie :  $\forall x \in J$ ,  $(1+x)f'(x) = 0$ . Comme  $1+x \neq 0$  pour  $x \in J$ , on en déduit :  $\forall x \in J$ ,  $f'(x) = 0$ . Ainsi  $f$  est de dérivée nulle sur un intervalle, donc  $f$  est constante ; réciproquement, toute fonction constante vérifie bien  $u(f) = 0_E$ , donc  $\ker(u)$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $J$ . Notons que  $f_0 = 1$ , et donc que l'ensemble des fonctions constantes est  $\text{Vect}(f_0)$ . Il est alors plus succinct de dire :

$$\ker(u) = \text{Vect}(f_0).$$

Passons à l'image de  $u$ . Comme  $E$  est engendré par  $\mathcal{B}$ , l'image de  $u$  est engendrée par  $u(\mathcal{B})$ . Or, d'après la question précédente :

$$\text{im}(u) = \text{Vect}(u(\mathcal{B})) = \text{Vect}\left(\left(u(f_{-1})\right) \cup \left(u(f_k)\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\right).$$

Puisque  $-kf_k$  est nulle pour  $k = 0$ , on peut sans dommage retirer cette fonction des combinaisons linéaires de  $(f_0) \cup (-kf_k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ . On a alors  $\text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}\right)$ . Multiplier des vecteurs par des scalaires non nuls ne change pas le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, donc :  $\text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(-kf_k\right)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_0\right) \cup \left(f_k\right)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}\right) = \text{Vect}\left(\left(f_k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\right)$ . En conclusion :

$$\text{im}(u) = \text{Vect}\left(\left(f_k\right)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\right).$$

*Remarque.* Un autre argument serait d'utiliser la question précédente pour montrer que  $f_0, \dots, f_p \in \text{im}(u)$ . Comme un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire, on a aussi :  $\text{Vect}(f_0, \dots, f_p) \subseteq \text{im}(u)$ . Le premier espace vectoriel admet pour base  $(f_0, \dots, f_p)$ , donc il est de dimension  $p+1$ , tandis que  $\text{im}(u)$  est de dimension  $(p+2) - \dim(\ker(u)) = p+1$  grâce au théorème du rang. L'inclusion, et l'égalité des dimensions, impliquent l'égalité des espaces.

(2.4) On a vu dans la question précédente que  $f_{-1} \notin \text{im}(u)$ , donc :  $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$ .

(2.5) On reprend les calculs effectués dans la question 2.1, et on en déduit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Une écriture par blocs serait plus lisible, et surtout très agréable d'emploi pour les deux questions suivantes. Si l'on note :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}),$$

alors on a :  $M = \begin{pmatrix} A & 0_{M_{2,p}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{p,2}(\mathbb{R})} & D \end{pmatrix}$ .

## Exercice 2 (CCP 2020)

Q15. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\ (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \end{array} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 2)\lambda,\end{aligned}$$

donc :  $\chi_A = (X - 2)(X + 2)X$ .

**Q19.** On pourrait déterminer  $D^{-1}AD$  à l'aide de la formule du changement de base, entre la base canonique  $(E_1, E_2, E_3)$  et la base  $(E_1, iE_2, -E_3)$  de  $M_{3,1}(\mathbb{C})$  (il s'agirait alors de décrire l'endomorphisme de  $M_{3,1}(\mathbb{C})$  canoniquement associé à  $A$  dans cette nouvelle base), mais autant faire un calcul direct (parce que les produits matriciels avec les matrices diagonales  $D$  et  $D^{-1}$  sont extrêmement simples : sinon, hors de question de procéder ainsi). Notons que  $i^{-1} = -i$ , comme c'est facile de le vérifier. Alors :

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc :  $D^{-1}AD = -iB$ .

**Q20.** Même commentaire et même stratégie que ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}A\Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice obtenue est symétrique et à coefficients réels, donc est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme  $A$  est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

**Q21.** Considérons donc des scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  tels que :  $\sum_{k=0}^n \alpha_k f_k = 0$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1} \cos(x) + \dots + \alpha_n(\cos(x))^n = 0.$$

En posant  $x = 0$ , cette égalité implique  $\alpha_n = 0$ . L'égalité devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1} \cos(x) + \dots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1} \sin(x) = 0.$$

Pour tout  $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , on a  $\sin(x) \neq 0$  et on peut donc diviser cette égalité par  $x$  pour obtenir :

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad \alpha_0(\sin(x))^{n-1} + \alpha_1(\sin(x))^{n-2} \cos(x) + \dots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1} = 0.$$

On ne peut plus prendre  $x = 0$  puisque cette égalité est valable pour  $x \in ]0, \pi[$ , mais en prenant la limite quand  $x \rightarrow 0^+$  on obtient  $\alpha_{n-1} = 0$ . Ainsi on a  $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$ .

Répétons ce procédé  $p$  fois, de sorte que  $\alpha_n = \dots = \alpha_{n-p+1} = 0$ . On a alors :

$$\forall x \in ]0, \pi[, \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1} \cos(x) + \dots + \alpha_{n-p}(\cos(x))^{n-p}(\sin(x))^p = 0.$$

Encore une fois, en divisant par  $(\sin(x))^p$  pour  $x \neq 0$  et en faisant tendre  $x$  vers 0 par valeurs supérieures, on obtient  $\alpha_{n-p} = 0$ . Par récurrence, on obtient la nullité de tous les scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ , donc la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre.

Comme, de plus, la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  engendre  $V_n$ , on en déduit que c'est une base de  $V_n$ . On a :

$$\dim(V_n) = \text{card}((f_0, \dots, f_n)) = n + 1.$$

**Q22.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $k = 0$  alors  $f'_0 = n \sin^{n-1} \cdot \cos = n f_1 \in V_n$ , et si  $k = n$  alors  $f'_n = -n \cos^{n-1} \sin = -n f_{n-1} \in V_n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a :

$$\begin{aligned} f'_k &= -k \sin \cdot \cos^{k-1} \cdot \sin^{n-k} + \cos^k \cdot (n-k) \cos \sin^{n-k-1} \\ &= -k \cos^{k-1} \sin^{n-(k-1)} + (n-k) \cos^{k+1} \sin^{n-(k+1)} \\ &= -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \end{aligned}$$

donc  $f'_k \in V_n$  en tant que combinaison linéaire de vecteurs de  $V_n$ . Nous avons donc bien démontré que  $f'_k \in V_n$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et donc par linéarité de la dérivation on en déduit :

$$\forall f \in V_n, \quad f' \in V_n$$

(nous disons ici implicitement que pour montrer la stabilité d'un espace vectoriel par un endomorphisme, il suffit de vérifier la stabilité sur une famille génératrice). Cela prouve que l'application  $\varphi_n : f \mapsto f'$  est un endomorphisme de  $V_n$ . Les calculs ci-dessus peuvent d'ailleurs se réécrire ainsi :

$$\varphi_n(f_0) = n f_1, \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \varphi_n(f_k) = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}, \quad \varphi_n(f_n) = -n f_{n-1},$$

donc la matrice de  $\varphi_n$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

## CORRIGÉ

### 1<sup>ère</sup> Partie.

- 1) – Si  $a, b, c, d$  sont tous nuls, alors  $\text{rg}A = 0$ .  
 – Si  $a, b, c, d$  ne sont pas tous nuls et  $\det A = 0$ , alors  $\text{rg}A = 1$ .  
 – Si  $a, b, c, d$  ne sont pas tous nuls et  $\det A \neq 0$ , alors  $\text{rg}A = 2$ .

2) a)  $\text{rg}A = 0 \iff \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = 0$   
 $\iff C_i(A) = 0, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$   
 $\iff a_{i,j} = 0, \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$   
 $\iff A = 0$

Donc  $A \neq 0 \iff \text{rg}(A) \neq 0 \iff \text{rg}(A) \geq 1$ .

- b) Question de cours.  
 3) Question de cours.  
 4) a) Un calcul simple, montre que

$$a_{i,j} = u_i v_j$$

b)  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^t U V = \langle U, V \rangle$ .

- c) D'après 4.a) on peut conclure que

$$C_j(A) = v_j U$$

- d)  $U \neq 0, V \neq 0 \implies \exists i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $u_i \neq 0, v_j \neq 0$   
 $\implies \exists i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $a_{i,j} \neq 0$   
 $\implies A \neq 0$   
 $\implies \text{rg}A \geq 1$

D'autre part toutes les colonnes sont proportionnelles à  $U$ , donc  $\text{rg}A = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \leq 1$ , d'où l'égalité.

- 5) a) Supposons le contraire, dans ce cas  $A = 0$ , donc  $\text{rg}A = 0$ , contradiction.
- b) On a  $\text{rg}A = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = 1$ , donc  $C_{i_0}(A) \neq 0$  en constitue une base, donc pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$  tel que  $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$ .
- c) D'après la question précédente, on peut conclure que  $a_{i,j} = x_i \lambda_j$  où  $x_i = a_{i,i_0}$ , d'après 4.a) on conclut aussi que  $A = X^t Y$  où  $X = C_{i_0}(A)$  et  $Y = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
- d) D'après 4.c) on peut affirmer que :

$$A = X_1^t Y_1 \implies X = C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_1 \neq 0, \text{ donc}$$

$$X_1 = \alpha X$$

avec  $\alpha = \frac{1}{y_{i_0}} \neq 0$ , mais aussi

$$Y_1 = \frac{1}{\alpha} Y$$

2<sup>ème</sup> Partie.

- 1)  $A^2 = U^t V U^t V = U \underbrace{\langle U, V \rangle}_{\alpha}^t V = \alpha U^t V = \alpha A$ .
- 2) Par récurrence simple sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , on montre que  $A^n = \alpha^{n-1} A$ , comme  $A \neq 0$ , alors elle est nilpotente *si et seulement si*  $\alpha = 0$ .
- 3) Supposons  $A$  non nilpotente, donc  $\alpha \neq 0$ , dans ce cas pour tout réel  $\lambda$ , on a  $(\lambda A)^2 = \lambda^2 \alpha A = \lambda \alpha (\lambda A)$ , ainsi  $\lambda A$  est un projecteur *si et seulement si*  $\lambda \alpha = 1$ , pendre donc  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ .