My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

# Contrôle : Algèbre Linéaire

**Durée : 2 heures**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que $n$.
Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que $P$ est de degré $n$ quand $a_n$ et $a_n$ s'appelle alors le coefficient dominant de $P$.
Pour tout entier naturel $n$, on appelle $c_n$ la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

## Partie I.

**1.** Vérifier que pour tout entier naturel $n$, la fonction $c_n$ est continue sur $[-1, 1]$.
**2.** Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.
**3.** Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions $c_0, c_1, c_2, c_3$.
**4.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1, 1],\ c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.
**5.** Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ est un polynôme de degré $n$ de coefficient dominant que l'on explicitera.
**6.** Prouver que pour tout $n$, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
**7.** Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

## Partie II.

Pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
Calculer $I_{p,p}$.

## Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

**1.** Vérifier que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme $T_n$ défini dans la partie **I**.

**2.** Soit $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \dots, x_n)$, c'est à dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous $i$ et $j$ dans $[|1, n|]$, vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

où $\delta_i^j$ est le symbole de Kronecker : $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

**2.a.** $\mathcal{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ?
**2.b.** Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \quad \text{avec} \quad \forall j \in [|1, n|],\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

**2.c.** Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

i. Justifier l'existence et l'unicité deux polynômes $S$ et $U$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $R = ST_n + U$.
ii. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

# *Corrigé (e3a 2014)*

## Partie I.

**1.** arccos étant continue sur $[-1,1]$ (bijection réciproque d'une fonction continue) et cos étant continue sur $\mathbb{R}$, $c_n$ est continue sur $[-1,1]$ par théorème d'opérations.

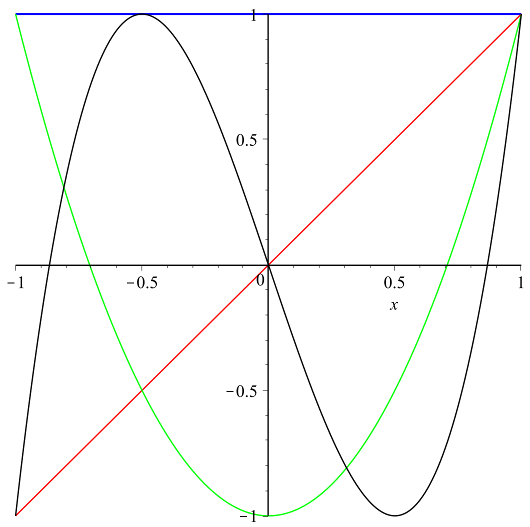
**2.** Soit $x \in [-1,1]$ ; on a $\cos(\arccos(x)) = x$. On a alors immédiatement

$$c_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad c_1(x) = x$$

Les formule élémentaire de trigonométrie donnent

$$c_2(x) = 2x^2 - 1, \ c_3(x) = 4x^3 - 3x$$

**3.** On obtient la représentation suivante




**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos(x)$. Alors $c_n(x) = \cos(n\theta)$. Comme $\cos\left((n+1)\theta\right) + \cos\left((n-1)\theta\right) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$. On a donc

$$c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$$

en utilisant toujours $\cos(\arccos(x)) = x$.

**5.** On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \deg(T_n) = n \text{ et si } n \geq 1 \text{ le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}$$

Le coefficient dominant de $T_0$ est lui égal à 1.

- Initialisation : le résultat est vrai aux rang 0 et 1 par définition.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang $n$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est un polynôme de degré $\leq n+1$ (différence de deux tels polynômes) avec un un coefficient devant $X^{n+1}$ égal à deux fois le coefficient dominant de $T_n$ et valant donc $2^n$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

**6.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est échelonnée en degré et donc libre. Elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**7.** Soit $x \in [-1, 1]$. On montre par une récurrence immédiate à partir de la question **4** et de la définition des $T_n$ que $c_n(x) = T_n(x)$ pour tout $n$ (on initialise pour $n = 0$ et $n = 1$ et les deux suites $(T_n(x))$ et $(c_n(x))$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2).

# Partie II.

[ ].

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))\, d\theta$$

Si $p + q = 0$, c'est-à-dire $p = q = 0$, l'intégrale vaut $\pi$.
Sinon, si $p - q = 0$ l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Enfin, dans le cas général ($p \neq q$), l'intégrale vaut 0 car $\sin((p \pm k)\theta)$ vaut 0 en $\pi$ et en 0.

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q \neq 0 \end{cases}$$

# Partie III.

**1.** Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a $x_k \in [-1, 1]]$ et donc $T_n(x_k) = c_n(x_k)$. Comme $\theta_k \in [0, \pi]$, $c_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = 0$ car $n\theta_k = \pi/2[\pi]$. $x_1, \ldots, x_n$ sont donc racines de $T_n$. Elles sont distinctes car cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et car les $\theta_k$ sont des éléments distincts de $[0, \pi]$. Comme $\deg(T_n) = n$, $T_n$ admet enfin au plus $n$ racines (comptées avec leurs multiplicités). Finalement, $x_1, \ldots, x_n$ sont exactement les racines de $T_n$ et ce sont, en plus, des racines simples.

**2.a.** Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, $Q = \sum_{i=1}^n Q(x_i)L_i$ (c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend la valeur $Q(x_i)$ au point $x_i$ et il n'y en a qu'un et donc c'est $Q$). Ceci montre que $(L_1, \ldots, L_n)$ (famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$) engendre $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par cardinal et dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

**2.b.** Soit $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\sum_{i=0}^k G(x_i)L_i = G$ (on vient de le rappeler) et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^n G(x_i) \int_{-1}^1 \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

ce qui est la formule demandée.

**2.c.** La division euclidienne de $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ par $T_n$ s'écrit $R = T_nS + U$ avec $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $T_nS = R - U$ est de degré $\leq 2n-1$ et $T_n$ de degré $n$ ; $S$ est donc de degré $\leq n-1$. On a ainsi existence de la décomposition demandée.
Si $R = T_nS + U = T_nS_1 + U_1$ avec $U, U_1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $U - U_1 = T_n(S - S_1)$ et si $S \neq S_1$, $\deg(U - U_1) \geq \deg(T_n) = n$ ce qui est impossible. Ainsi $S = S_1$ et donc $U = U_1$ cequi donne l'unicité de la décomposition (c'est en fait l'unicité dans la division euclidienne).
On a alors $T_n$ et $S$ que sont orthogonaux (avec **II.1.4**) et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= (R\,,1) = (T_nS + U\,,1) = (T_n\,,S) + (U\,,1)\\ &= \int_{-1}^1 \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i U(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(x_i)\end{aligned}$$

car $U(x_i) = R(x_i)$ puisque $T_n(x_i) = 0$.