

## Devoir Maison Polynômes

**Problème :**

1. Considérons

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$$

- (a) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Déterminer les variations de  $f$  et de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .  
*Pour votre information, les seuls réels utilisés dans le tableau de variations de  $f'$  sont  $-1, 0$  et  $1$ .*
- (c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  si et seulement si  $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ .  
En déduire que  $f$  possède un unique point fixe, noté  $\alpha$ , et que  $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ .
- (d) Déterminer le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3.  
Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de  $f$  au voisinage de 0?
- (e) Tracer la courbe représentative de  $f$  à l'aide de ces renseignements.

2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n + u_n^2}$$

- (a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$ .
  - (b) Montrer qu'il existe une constante  $C \in ]0, 1[$  telle que :  $\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], |f'(x)| \leq C$ .
  - (c) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq C^n$ . Conclusion ?
  - (d) Déterminer un entier naturel  $n$  explicite tel que  $u_n$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est de degré  $n$ , de coefficient dominant  $(-1)^n(n+1)!$  et vérifie

$$P_{n+1} = (1 + X + X^2) P_n' - (n+1)(2X+1)P_n$$

- (b) En remarquant que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(1+x+x^2)f(x) = 1$  et en utilisant la formule de Leibniz, établir que, pour tout  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket :$

$$P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2} = 0$$

- (c) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : P_n' = -(n+1)nP_{n-1}$ .
- (d) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les polynômes  $P_n$  et  $P_{n-1}$  n'ont aucune racine réelle commune.
- (e) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  n'admet pas de racine réelle multiple.

On désire améliorer ce résultat en prouvant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  possède exactement  $n$  racines réelles deux à deux distinctes. Nous devons établir au préalable une généralisation du théorème de Rolle.

4. Soit  $a$ , un réel fixé et  $g$ , une fonction définie, continue sur  $]a, +\infty[$  et dérivable sur  $]a, +\infty[$  vérifiant

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(a) On définit la fonction  $\varphi$  sur le segment  $[\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}]$  par :

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}\right], \varphi(x) = g(\tan x).$$

Prouver qu'il existe  $d \in ]\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\varphi'(d) = 0$ .

(b) En déduire l'existence de  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

5. (a) Vérifier que  $P_0$  admet aucune racine, que  $P_1$  a une seule racine qui est réelle, et que  $P_2$  possède exactement deux racines, qui sont réelles et distinctes.

(b) Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  : on suppose que  $P_n$  possède  $n$  racines réelles distinctes, notées et classées comme :  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ .

i. Montrer que la fonction  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins  $(n - 1)$  fois sur l'intervalle  $] \alpha_1, \alpha_n [$ .

ii. Montrer que la fonction  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $] \alpha_n, +\infty [$ .  
De même, prouver que  $f^{(n+1)}$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $] -\infty, \alpha_1 [$ .

iii. En déduire que le polynôme  $P_{n+1}$  possède exactement  $(n + 1)$  racines réelles distinctes.

(c) Conclure.

# Corrigé

## Problème :

1. (a) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  car inverse d'une fonction polynomiale de degré 2 avec discriminant strictement négatif. /1

- (b) On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$  et /2

$$f^{(2)}(x) = -\frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)^2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4} = 2\frac{-(1+x+x^2) + (2x+1)^2}{(1+x+x^2)^3} = \frac{6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$0 \xrightarrow{\quad} \frac{4}{3} \xleftarrow{1} \frac{1}{3} \xrightarrow{\quad} 0$			

$x$	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f^{(2)}(x)$		+	0	-	0	+
$f'(x)$		0	$0 \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} -1 \xrightarrow{\quad} 0$			

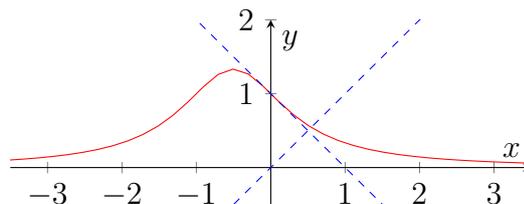
- (c) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \iff 1 = x(x^2 + x + 1) \iff x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ .  
 Posons  $g : x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc  $g$  est strictement croissante. De plus,  $g(\frac{1}{3}) = \frac{13}{27} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$  et  $g(1) = 2 > 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, g(\alpha) = 0$  i.e.  $f(\alpha) = \alpha$ .  
 De plus,  $\alpha \in [\frac{1}{3}, 1]$ . /2

- (d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+u}$  où  $u = x + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Or  $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ .  
 Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - (x + x^2) + (x + x^2)^2 - (x + x^2)^3 + o((x + x^2)^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par conséquent, la courbe représentative de  $f$  se situe au-dessus de la tangente d'équation  $y = 1 - x$  au voisinage à droite de 0 et en-dessous au voisinage à gauche de 0. /2

(e)



/1

2. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Or,  $u_0 \in [\frac{1}{3}, 1]$  et d'après le tableau de variation de  $f$ , l'intervalle  $[\frac{1}{3}, 1]$  est stable par  $f$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{3} \leq u_n \leq 1$ . /1

(b) La fonction  $f'$  est négative et croissante sur  $[\frac{1}{3}, 1]$ . Par conséquent, pour tout  $x \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  
 $|f'(x)| = -f'(x) \leq -f'(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{5}{3}}{(\frac{13}{9})^2} = \frac{135}{169}$ . On notera par la suite  $C = \frac{135}{169}$ . /1

(c) D'après l'inégalité des accroissements finis,  $\forall x, y \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 pour  $x = u_n$  et  $y = \alpha$ , on obtient  $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq C|u_n - \alpha|$  i.e.  $|u_{n+1} - \alpha| \leq C|u_n - \alpha|$  d'où  
 $|u_n - \alpha| \leq C^n|u_0 - \alpha| \leq C^n$ . Or  $C^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'où  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ . /1

(d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C^n \leq 10^{-3} \iff n \log(C) \leq -3 \iff n \geq \frac{3}{\log(\frac{169}{135})}$ .  
 Ainsi, pour  $n = \left\lceil \frac{3}{\log(\frac{169}{135})} \right\rceil + 1$ ,  $u_n$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près. /1

3. (a) *Unicité.* Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}} = \frac{Q(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$  alors  
 $P(x) = Q(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donc,  $P$  et  $Q$  coïncident sur une partie infinie de  $\mathbb{R}$  donc  $P = Q$ .  
*Existence.* Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $P(n)$  suivante : il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$   
 de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-1)^n(n+1)!$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ .  
 Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation :  $f^{(0)} : x \mapsto \frac{P_0(x)}{1+x+x^2}$  où  $P_0 = 1$ . On a  $\deg(P_0) = 0$  et  $\text{cd}(P_0) = 1$  d'où  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons qu'il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  et de coefficient  
 dominant  $(-1)^n(n+1)!$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x)(1+x+x^2)^{n+1} - P_n(x)(n+1)(2x+1)(1+x+x^2)^n}{(1+x+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{P'_n(x)(1+x+x^2) - P_n(x)(n+1)(2x+1)}{(1+x+x^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

Posons  $P_{n+1} = (1+X+X^2)P'_n - (n+1)(2X+1)P_n$ , alors  $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}}$  pour tout  
 $x \in \mathbb{R}$ . De plus,  $P_{n+1} = (n \times \text{cd}(P_n) - 2(n+1)\text{cd}(P_n))X^{n+1} + \dots = -(n+1)\text{cd}(P_n)X^{n+1} + \dots$   
 Par conséquent,  $\deg(P_{n+1}) = n+1$  et  $\text{cd}(P_{n+1}) = (-1)^{n+1}(n+2)!$  d'où  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $n$ , de coefficient  
 dominant  $(-1)^n(n+1)!$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ . /4

(b) Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . Notons  $g : x \mapsto 1+x+x^2$ . On a  $fg$  qui est constante en 1 donc  $(fg)^{(n)} = 0$ .  
 Par ailleurs, d'après la formule de Leibniz,  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$  d'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= (1+x+x^2)f^{(n)}(x) + (2x+1)nf^{(n-1)}(x) + 2\binom{n}{2}f^{(n-2)}(x) \\ &= \frac{P_n(x) + n(2x+1)P_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x+x^2)P_{n-2}(x)}{(1+x+x^2)^n} \end{aligned}$$

Par conséquent, le polynôme  $P_n + n(2X+1)P_{n-1} + n(n-1)(1+X+X^2)P_{n-2}$  coïncident sur  
 $\mathbb{R}$  avec le polynôme nul, c'est donc le polynôme nul. /2

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après la question 3)b),  $P_{n+1} + (n+1)(2X+1)P_n + n(n+1)(1+X+X^2)P_{n-1} = 0$ .  
 Par ailleurs, d'après la question 3)a),  $P_{n+1} + (n+1)(2X+1)P_n = (1+X+X^2)P'_n$ .

Par conséquent,  $P'_n = -(n+1)nP_{n-1}$ . /1

(d) Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $P_n(\beta) = P_{n-1}(\beta) = 0$ . Par  
 conséquent,  $P_{n-2}(\beta) = 0$  d'après la question 3)b) (car  $\beta^2 + \beta + 1 \neq 0$ ). En itérant le procédé, on  
 remarque que  $P_k(\beta) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \llbracket$ . En particulier,  $P_0(\beta) = 0$ . Absurde car  $P_0 = 1$ .  
 Pour tout  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ , les polynômes  $P_n$  et  $P_{n-1}$  n'ont aucune racine réelle commune, ce qui  
 est encore vraie pour  $n = 1$  car  $P_0 = 1$  n'admet pas de racine. /1

(e) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_{n-1}$  et  $P'_n$  ont les mêmes racines d'après la question 3)c). Par conséquent, les polynômes  $P_n$  et  $P'_n$  n'ont aucune racine réelle commune donc  $P_n$  n'admet pas de racine réelle multiple (ce qui reste vraie pour  $n = 0$ ). /1

4. Soit  $a$ , un réel fixé et  $g$ , une fonction définie, continue sur  $]a, +\infty[$  et dérivable sur  $]a, +\infty[$  vérifiant

$$g(a) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

(a) La fonction  $\varphi$  définie sur  $[\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}]$  par  $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$  et  $\forall x \in [\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$ ,  $\varphi(x) = g(\tan x)$  est une fonction continue sur  $[\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$  par composée. De plus, par composée également,  $\varphi(x) = g(\tan x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0 = \varphi(\frac{\pi}{2})$ , donc  $\varphi$  est continue sur  $[\text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}]$ . Par composée encore,  $\varphi$  est dérivable sur  $] \text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$ . On remarque que  $\varphi(\text{Arctan}(a)) = g(a) = 0 = \varphi(\frac{\pi}{2})$ . D'après le théorème de Rolle sur  $\varphi$ , il existe  $d \in ] \text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\varphi'(d) = 0$ . /2

(b) Pour tout  $x \in ] \text{Arctan}(a), \frac{\pi}{2}[$ ,  $\varphi'(x) = \frac{g'(\tan(x))}{1+x^2}$ . D'où  $g'(\tan(d)) = 0$ .

En posant  $c = \tan(d)$ ,  $c \in ]a, +\infty[$  et  $g'(c) = 0$ . /1

5. (a) D'après la question 1)b),  $P_0 = 1$  admet aucune racine,  $P_1 = -2X - 1$  a une seule racine  $(-\frac{1}{2})$  qui est réelle et  $P_2 = 6X(X + 1)$  possède exactement deux racines (0 et  $-1$ ), qui sont réelles et distinctes. /1

(b) Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  : on suppose que  $P_n$  possède  $n$  racines réelles distinctes, notées et classées comme :  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ . /2

i. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \llbracket$ ,  $f^{(n)}(\alpha_k) = \frac{P_n(\alpha_k)}{(1+\alpha_k+\alpha_k^2)^{n+1}} = 0$ . On peut donc utiliser le théorème de Rolle pour  $f^{(n)}$  sur les intervalles  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \llbracket$ . Par conséquent, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \llbracket$ , il existe  $\beta_i \in ]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  tel que  $f^{(n+1)}(\beta_i) = 0$ .

ii. On a  $f^{(n)}(\alpha_n) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$  car  $\deg(P_n) < \deg((1+X+X^2)^{n+1})$ . D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe  $\beta_n \in ]\alpha_n, +\infty[$  tel que  $f^{(n+1)}(\beta_n) = 0$ . Avec les mêmes arguments, il existe  $\beta_0 \in ]-\infty, \alpha_1[$  tel que  $f^{(n+1)}(\beta_0) = 0$ .

iii. La fonction  $f^{(n+1)}$  s'annule en  $\beta_0, \dots, \beta_n$  qui sont  $(n+1)$  réels distincts. Par conséquent, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \llbracket$ ,  $P_{n+1}(\beta_i) = f^{(n)}(\beta_i)(1+\beta_i+\beta_i^2)^{n+2} = 0$ . De plus,  $\deg(P_{n+1}) = n+1$ , donc le polynôme  $P_{n+1}$  possède exactement  $(n+1)$  racines réelles distinctes.

(c) La récurrence est établie grâce à l'initialisation prouvée dans la question 5)a) et à l'hérédité prouvée dans la question 5)b). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  possède exactement  $n$  racines réelles deux à deux distinctes. /1