My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

CNC 2023

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, E_n désigne le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

On note Φ l'application de E vers E définie par :

$$\forall\, P \in E, \quad \Phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

2.1. Linéarité de Φ

2.1.1. Vérifier que Φ est une application linéaire.

2.1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel E_n de E est stable par Φ.

Dans la suite, on note Φ_n l'endomorphisme de E_n induit par Φ.

On pose $\varepsilon_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul k, on pose $\varepsilon_k = X^k$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E_n, c'est sa base canonique.

2.1.3. Calculer $\Phi(\varepsilon_0)$, $\Phi(\varepsilon_1)$ et $\Phi(\varepsilon_k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

2.2. Étude de l'endomorphisme Φ_3

2.2.1. Écrire la matrice A_3 de l'endomorphisme Φ_3 relativement à la base $\mathcal{B}_3$.

2.3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$ et on note P_n le polynôme dérivé $n-$ième du polynôme U_n, c'est-à-dire $P_n = U_n^{(n)}$. On convient enfin que $U_0 = P_0 = 1$.

2.3.1. Établir que, pour tout entier naturel n, $\quad (X^2-1)U_n' - 2nXU_n = 0$.

2.3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant $(n+1)$ fois les deux membres de la relation précédente, montrer que

$$\Phi(P_n) = n(n+1)P_n.$$

2.3.3. Montrer alors que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n
. Que peut-on conclure sur Φ_n ?

2.4. Soit $P \in E$ un polynôme non nul, de degré p et dont le coefficient dominant est noté α_p, $p \in \mathbb{N}$. Soit enfin $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1. Montrer que si $\Phi(P) = n(n+1)P$, alors $p = n$.

2.4.2. Ici on prend $p = n$, on écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et on suppose que $\Phi(P) = n(n+1)P$.

(i) Établir que $\alpha_{n-1} = 0$ et trouver une relation entre α_k et α_{k+2}, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.

(ii) En déduire, sans les calculer, que tous les coefficients non nul de P s'expriment à l'aide de α_n.

2.4.3. Que peut-on alors dire de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\big(\Phi - n(n+1)\mathrm{id}_E\big)$? Ce résultat était-il prévisible sans calcul ?