Feuille d'Exercices

Polynômes

EXERCICE 1. Calculs de degrés et de coefficients dominants

Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $X^3 - X(X-2+i)$ 2. $(X-2)^n - (X+5)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ 3. $\prod_{k=0}^{n} (2X-k)$
4. $\prod_{k=0}^{n} (X-6)^k$ 5. $\prod_{k=0}^{n} (kX-2)^{k^2}$

EXERCICE 2. Décomposition en irréductibles

Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 3. Un peu de géométrie

On désire prouver le résultat suivant :
« Si a, b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a+b+c=1$, alors un des ces trois complexes vaut 1 ».
Supposons que a, b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$.

1. Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.
   Justifier l'existence d'une constante complexe α non nulle telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
3. Conclure.

EXERCICE 4. Détermination d'ensemble de polynômes

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P_n - P_n' = X^n$.

EXERCICE 5. Division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$ 2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X-i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-2)^2$ 4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-3)^2$

EXERCICE 6. Calcul de puissances d'une matrice avec un polynôme annulateur

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. Méthode 1 : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Méthode 2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 7. Formule de Vandermonde

Soient N_1 et N_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N_1 + N_2]\!]$.
En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{N_1} \times (1+X)^{N_2}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

Proposer une autre démonstration de cette formule en dénombrant des tirages simultanés dans une urne.

Sujets d'étude

EXERCICE 8. Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$

2. En déduire que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(x_j) = y_j.$$

EXERCICE 9. Calcul d'un produit

Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. A l'aide des racines de Q déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

EXERCICE 10. Polynômes de Tchebychev

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. En déduire les racines de P_n.
5. Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
6. À l'aide des formule d'Euler et de De Moivre donner une autre expression de $P_n(X)$.

EXERCICE 11. Localisation des coefficients d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les racines $(n+1)^{\text{èmes}}$ de l'unité : $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$.
On définit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, et on pose $M = \max_{k\in[\![0,n]\!]} \left|P(z_k)\right|$.

1. Vérifier que : $M > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p$ en fonction de p.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\sum_{k=0}^{n} P(z_k)\right| \leqslant (n+1)M$.
   (b) En déduire que : $|a_0| \leqslant M$.
4. Montrer que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.