Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Feuille d'Exercices

Calcul Différentiel

Exercice 1

Pour chaque sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, préciser s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, ou d'un fermé borné. Aucune justification n'est demandée.

1. $A = \mathbb{R}^2$
2. $B = [0,1] \times [0,1]$
3. $C = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
4. $D =]1, +\infty[\ \times \mathbb{R}_+^*$
5. $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x + y \geqslant 1\right\}$
6. $F = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
7. $G =]0,1[\ \times\ ]0,1[$
8. $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
9. $I = \mathbb{R} - \{-1;1\} \times \mathbb{R}_+^*$
10. $J = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{y^2+1} - \sqrt{xy}$$

1. Expliciter les applications partielles de f en $(2,1)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U proposé, et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

1. f définie par $f(x,y) = x^2 + 3x^2y - xy + y^2$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
2. f définie par $f(x,y) = (x+y)(1-2x-2y)$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
3. f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;
4. f définie par $f(x,y) = x\,(\ln(x) + x + y^2)$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;
5. f définie par $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ sur $U = \mathbb{R}^2$;
6. f définie par $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$ sur $U =]0,+\infty[\ \times\ ]1,+\infty[$;
7. f définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$ sur $U = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Déterminer l'unique point (a,b) en lequel f est suceptible de présenter un extremum local.
3. Prouver que f atteint un minimum en (a,b).
4. Calculer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $5\left(x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{1}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}(y-2)^2$.
   En déduire que f admet un minimum global su $\mathbb{R}^2$.
   Quelle est la valeur de ce minimum ?

Exercice 6
T est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations :

$$x \geqslant \frac{1}{4};\ y \geqslant \frac{1}{4};\ x+y \leqslant \frac{3}{4}$$

On note T' « l'intérieur de T » à savoir l'ensemble des couples (x,y) solutions du système d'inéquations :

$$x > \frac{1}{4};\ y > \frac{1}{4};\ x+y < \frac{3}{4}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Soit f la fonction définie sur T par : $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur T'.
b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.

4. ***a)*** Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur :

$$\mathscr{C}=\left\{(x,y)\in T\ ;\ x=\frac{1}{4} \text{ ou } y=\frac{1}{4} \text{ ou } x+y=\frac{3}{4}\right\}.$$

b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T :

$$2\leqslant f(x,y)\leqslant \frac{16}{3}$$

Exercice 7
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2. Déterminer un équivalent de $f(x,x)-f(0,0)$ et de $f(x,0)-f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

3. Rechercher les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ g(x,y,z)=4x^2+4y^2+2z^2+4xz-4yz$$

On définit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=g(x,y,y^2)$$

On dit alors qu'on étudie la fonction g **sous la contrainte** $z=y^2$.

1. Expliciter $f(x,y)$, et calculer :

$$\partial_1(f)(x,y),\ \partial_2(f)(x,y),\ \partial_1^2(f)(x,y),\ \partial_{12}^2(f)(x,y) \text{ et } \partial_2^2(f)(x,y)$$

2. Déterminer les extrema éventuels de f sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $g(x,y,z)=4\left(x+\dfrac{1}{2}z\right)^2+4\left(y-\dfrac{1}{2}z\right)^2$.
En déduire que f admet un minimum global en $(0,0)$.

4. Montrer que f présente un minimum local en $(-2,2)$.

5. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.
En déduire le développement limité d'ordre 2 de $f\left(-\dfrac{1}{2}+h,1+h\right)$ et de $f\left(-\dfrac{1}{2}+h,1-h\right)$, lorsque h est au voisinage de 0. En déduire que f ne présente pas d'extremum local en $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3. ***a)*** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant x\,\mathrm{e}^x$.

b) En étudiant la fonction $g : x \mapsto x\ \mathrm{e}^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question ***3.b)*** est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3. ***a)*** Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question ***3)*** pour établir : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}$.

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ par :

$$f(x,y) = x^2 \ln(y) - y \ln(x)$$

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$.

a) Montrer que g est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ pour $t > 0$.

b) Étudier les variations de g' sur $]0; +\infty[$, puis celle de g sur $]0; +\infty[$.
(On précisera à chaque fois les limites aux bornes)

c) En déduire qu'il existe un unique élément strictment positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

d) Vérifier que : $\ln(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$.

2. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

c) En déduire que si (x_0, y_0) est un point critique de f, alors $x_0 > 1$ et $y_0 = \frac{(x_0)^2}{\ln(x_0)}$.

d) Établir alors que $g(\ln(x_0)) = 0$.
En déduire que f possède un unique point critique noté M, de coordonnées $\left(\mathrm{e}^\alpha, \frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{\alpha}\right)$ où α est le réel défini au ***1.c)***.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) En utilisant la relation de la question ***1.d)***, montrer que :

$$2\ln(y_0) + \frac{y_0}{(x_0)^2} = \frac{2}{\alpha}$$

En déduire que la fonction f ne présente pas d'extremum.

Exercice 12
Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $F_a(x,y)$ en fonction de x, y et a.

2. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles.
Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

4. Calculer, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre :

$$G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$$

et préciser son signe.

5. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$.
Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum global et donner sa valeur notée $M(a)$.

6. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Exercice 13
On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x} \end{array}$

1. Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule, qu'on notera par la suite x_0.

2. Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

3. ***a)*** Écrire la matrice hessienne, notée H, de f au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$.

b) Montrer que H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 6 + x_0 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 & = & 4 + 4\,x_0 \end{array} \right.$$

c) La fonction f présente-t-elle un extremum local au point $\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$?

Exercice 14
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi\,(x) = 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall\,(x,y) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[\,,\ f\,(x,y) = \mathrm{e}^{x+4y} \ln\,(xy)$$

Étude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

2. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi\,(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.

4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.

5. On rappelle que $\ln\,(2) \simeq 0,7$.
Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi\,(\alpha) = \varphi\,(\beta) = 0 \ \text{ avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

6. Proposer un programme en **Python** permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

7. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

8. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x et y strictement positifs :

$$\begin{cases} \partial_1(f)\,(x,y) = f\,(x,y) + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\ \partial_2(f)\,(x,y) = 4f\,(x,y) + \dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$

9. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

10. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et établir que :

$$\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial^2_{2,2}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \partial^2_{2,1}(f)\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$?
Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum).

12. De même, f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?

Exercice 15

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

4. ***a)*** Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

5. Parmi les trois nappes suivantes, laquelle correspond à la représentation graphique de f ?