PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN
PSI

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Feuille d'Exercices

Déterminants

Quelques déterminants

Exercice 1 :

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}_n$.

Exercice 2 :

Calculer, pour $a \in \mathbb{R}$, le déterminant de $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\begin{cases} a_{i,i} = a+1 & \\ a_{i,j} = 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Exercice 3 :

Calculer, pour $a \in \mathbb{R}$, le déterminant de $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \binom{i}{j-1}$ où $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial "p pris parmi n"..

Exercice 4 :

On considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de termes généraux $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Soit $A = ((a_{i,j}))$ avec $a_{i,j} = \min(i,j)$.
Montrer que $A = NM$ et en déduire $\det(A)$.

Déterminants d'endomorphismes

Exercice 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. Vérifier que $u : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer son déterminant.

Exercice 6 :

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par $u(P) = P + P'$ et $v(P) = XP' + P(1)$. Déterminer $\det(u)$ et $\det(v)$.

Exercice 7 :

On considère l'endomorphisme $A \longmapsto {}^tA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer son déterminant.

Avec des blocs

Exercice 8 :
Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **telles que** C **et** D **commutent et** D **est inversible**.
Effectuer le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$. En déduire $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

Exercice 9 :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et a, b, c, d quatre complexes, b et d étant non nuls.

1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} aM & BM \\ cM & dM \end{pmatrix}$ est le produit de deux matrices, la seconde étant diagonale par blocs.
2. En déduire le déterminant de P.

Matrices classiques

Exercice 10 :
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur du déterminant tridiagonal :

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_n .$$

Exercice 11 :
Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 + a & X_2 + a & X_3 + a \\ X_1^2 + bX_1 + c & X_2^2 + bX_2 + c & X_3^2 + bX_3 + c \end{vmatrix}$

Exercice 12 :
Calculer $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_2 \cdots x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_1 \cdots x_{n-1} \end{vmatrix}_n$.