EXERCICES

.–ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

1. Résoudre les équations suivantes d'ordre 1 :

a) $(2+t)y' = 2-y$

b) $ty' + y = \cos t$

c) $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$

d) $t^3y' - t^2y = 1$

e) $3ty' - 4y = t$

f) $y' + y = \sin t + 3\sin 2t$

g) $2t(1-t)y' + (1-2t)y = \frac{1}{t}$

h) $t(t+1)y' + y = t+2$

i) $t(t^2-1)y' + 2y = t\ln t - t^2$

2. Résoudre les équations suivantes d'ordre 2 à coefficients constants :

a) $y'' - 2y' + 2y = t\,\mathbf{e}^t$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2(t-2)\,\mathbf{e}^t$

c) $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2t + 25\sin 2t$

d) $y'' - 2y' + 5y = \mathbf{e}^t\cos^2 t$

e) $y'' + y = \cot t$ *(variation de la constante avec* $\sin$*)*

f) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{t-1}{t^2}\,\mathbf{e}^{-t}$ *(variation de la constante avec* $\mathbf{e}^{-t}$*)*

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2

3. Résoudre les équations suivantes d'ordre 2 à coefficients non constants :
(Les indications concernent l'équation homogène. Pour une solution particulière de l'équation complète, on se débrouillera comme un(e) grand(e).)

a) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$ *(chercher des solutions de la forme* $y = t^\alpha$*)*

b) $(1-t^2)y'' + 2ty' - 2y = -(t-1)^2\,\mathbf{e}^t$ *(chercher des solutions polynomiales)*

c) $t^2y'' - ty' + y = 0$ *(chercher une solution de la forme* $y = t^\alpha$*)*

d) $t(t+1)y'' - 2ty' + 2y = 0$ *(chercher une solution de la forme* $y = t^\alpha$*)*

e) $t^2(1-t)y'' + t(t-1)y' + y = 0$ *(chercher une solution polynomiale)*

f) $t(1-2\ln t)y'' + (1+2\ln t)y' - \frac{4}{t}y = 0$ *(chercher une solution de la forme* $y = t^\alpha$*)*

4. À l'aide du changement de variable ou de fonction indiqué, résoudre les équations suivantes.

a) $y'' - y' - \mathbf{e}^{2t}y = \mathbf{e}^{3t}$ *(poser* $u = \mathbf{e}^t$*)*

b) $y'' - \left(6t + \frac{1}{t}\right)y' + 8t^2y = t^4$ *(poser* $u = t^2$*)*

c) $t^2y'' - 2ty' + 2y = 2$ *(poser* $u = \ln t$*)*

d) $t^2y'' + 4ty' + (2-t^2)y = 1$ *(poser* $y = \frac{z}{t^2}$*)*

5. Chercher les solutions DSE des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

a) $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 6t$

b) $(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$

c) $t(1-t)y'' + (1-3t)y' - y = 0$ (+ LAGRANGE)

d) $t(t-1)y'' + 3ty' + y = 0$ (+ LAGRANGE)

e) $ty'' + 2y' - ty = 0$ *(Ruser...)*

f) $y'' + 2ty' + 2y = 0$ Quelles sont les solutions paires ?

6. On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$

a) Déterminer les solutions développables en série entière.

b) Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$

c) Retrouver le résultat à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.

7. Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que les solutions de l'équation différentielles $y' + a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

8. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty}(f' + f) = 0$. En intégrant l'équation différentielle $y' + y = f' + f$, montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

9. Résoudre les systèmes différentiels :

a) $\begin{cases} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -3x + y + z \\ y' = x - 3y + z \\ z' = x + y - 3z \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = -n^2x \\ y' = -y + (1-n^2)z \\ z' = y - (1+n^2)z \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

f) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}$

g) $X' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.X$

CONCOURS

10. *IMT*

Trouver une, puis toutes les solutions développables en série entière de l'équation
$$x(x-1)y''+3xy'+y=0$$

11. *CCINP*

a) Trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{1}{t(t^2-1)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t-1}+\dfrac{c}{t+1}$ pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

b) Résoudre l'équation différentielle $t(t^2-1)x'(t)+2x(t)=t^2$ sur $\mathbb{R}$.

12. *TPE*

Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}): y''+f(x)y=0$, où f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors $y_1'y_2-y_2'y_1$ est constante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si y est une solution de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ alors $y'(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, puis montrer que cette limite est nécessairement nulle.

c) Montrer que (E) admet une solution non bornée.

13. *CCINP*

Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et E l'équation différentielle $xy'+\lambda y=\frac{1}{1+x}$.

a) Exprimer à l'aide d'une intégrale les solutions de E sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de 0^+.

14. *CCINP*

On considère l'équation différentielle $(*): x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$.

a) Déterminer les fonctions développables en série entière solutions de $(*)$. Pourquoi y a-t-il d'autres solutions ?

b) Déterminer toutes les solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. On fera le changement de variable $y(x)=z(x)/(1-x)$ et on soignera les raccords.

15. *ENSAM*

On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}): 4xy''+2y'-y=0$.

a) Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit solution de (E).

b) Montrer que (E) admet une unique solution φ développable en série entière telle que $\varphi(0)=1$. Quel est son rayon de convergence ?

c) Montrer que les fonctions $x\mapsto\cos(\sqrt{x})$ et $x\mapsto e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ sont développables en série entière sur $[0,+\infty[$ et donner leur développement.

d) Déterminer l'expression de φ sur $\mathbb{R}$.

16. *ENSAM*

Soit $n\geqslant 2$, (E) l'équation différentielle $y''-y'-2y=0$ et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ défini par $h(\mathrm{P})=\mathrm{P}''-\mathrm{P}'-2\mathrm{P}$.

a) Donner une base de l'espace S des solutions de (E).

b) Montrer que l'endomorphisme h est bijectif. Est-il diagonalisable ?

c) Montrer que $\mathrm{A}=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ h(\mathrm{P})\in\mathrm{Vect}(\mathrm{X}^{n-1},\mathrm{X}^n)\}$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_{n-2}[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

d) Soit $f\in\mathrm{S}$. Montrer que la partie régulière T du développement limité à l'ordre n de f en 0 est un élément de A.

17. *Centrale*

Soit (S) le problème de Cauchy $(y'-2xy=1, y(0)=0)$. Donner la solution sous forme de série entière et préciser son rayon de convergence. Exprimer ensuite la solution à l'aide des fonctions usuelles.

18. *Centrale*

On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}): y''-2y'+y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E).

b) Soit f une solution de (E). On pose $g: x\mapsto e^{-x}f(x)$. Déterminer $g(x)$ (on demande une expression avec une seule intégrale). En déduire l'ensemble des solutions de (E).

c) Montrer que toute solution de (E) se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) Soit f une solution de (E). Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

19. *Mines Ponts*

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\forall x>0,\ f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{2}$.

20. *Mines Ponts*

Soient $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $(a,b)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Soit (E) l'équation différentielle $y^p(t)(y'(t)+a(t)y(t))=b(t)$.

Montrer qu'il existe un intervalle I ouvert contenant t_0 tel que (E) admette une unique solution sur I vérifiant $y(t_0)=x_0$.

21. *IMT*

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.

c) Résoudre le système différentiel $\left(x'=x+2z,\ y'=y,\ z'=2x+z\right)$.

22. *ENSAM*

Soit $\mathrm{M}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ une solution du système différentiel $(x'(t)=z(t), y'(t)=2z(t), z'(t)=x(t)+y(t)+2z(t))$.

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $\mathrm{M}(0)$ pour que la trajectoire de $\mathrm{M}(t)$ soit bornée lorsque $t\in[0,+\infty[$ puis lorsque $t\in\mathbb{R}$.

23. *Centrale*

Soit $p\in\mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f^{(3)}(t)-f(t)=e^{pt}$.