1 – ALGÈBRE LINÉAIRE

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

TECHNIQUES DE CALCUL

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base et la dimension.

a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2x - 5y + z = 0 \right\}$

b) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \right\}$

c) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+3z \\ 2x+3y+4z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$

2. Calculer des équations du sous-espace engendré par

a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \end{pmatrix} \right)$

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$

3. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ? forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$? Dans le cas où elles sont liées, expliciter une relation de dépendance linéaire et déterminer leur rang.

a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

d) $\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right)$

4. Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer des équations de leur noyau et leur image.

a) $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

b) $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - z \\ x + y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

c) $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + y + z + 2t \\ y - z + t \\ x - y + 3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

5. Chercher les rangs des matrices suivantes et donner une base de leur noyau (on fera le moins de calculs possible) :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$

6. Étudier l'inversibilité et, la cas échéant, calculer l'inverse des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Montrer, en résolvant un système linéaire, que $A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

DÉPENDANCE ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

8. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Déterminer si les familles suivantes sont des bases de E :

a) $v_j = \sum_{i=j}^{n} e_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$

b) $w_j = e_j + e_{j-1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$, $w_1 = e_1$

c) $w_j = e_j + e_{j-1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$, $w_1 = e_n + e_1$

9. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, soit $\mathscr{F} = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de polynômes telle que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

10. Les familles suivantes sont-elles libres ?

a) $(\sin, \cos)$ ***b)*** $\left(x \mapsto \mathbf{e}^{ax}, x \mapsto \mathbf{e}^{bx}, x \mapsto \mathbf{e}^{cx}\right)$ ***c)*** $\left(x \mapsto \mathbf{e}^{a+x}, x \mapsto \mathbf{e}^{b+x}\right)$

d) $\left(x \mapsto \cos(a+x), x \mapsto \cos(b+x), x \mapsto \cos(c+x)\right)$

11. Déterminer si les familles $(f_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de fonctions, dont on donne ci-dessous les expressions, sont libres dans $\mathscr{F}(D, \mathbb{R})$ ou non.

a) $f_{a_i}(x) = x^{a_i}$ où $a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$

b) $f_{a_i}(x) = \dfrac{1}{x - a_i}$ où $a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$

c) $f_k(x) = \sin^k x$ où $0 \leqslant k \leqslant n$

d) $f_k(x) = \sin(kx)$ où $0 \leqslant k \leqslant n$

e) $f_{a_i}(x) = \mathbf{e}^{a_i x}$ où $a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$

12. Soit F un sous-espace vectoriel, non réduit à zéro, de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que tous les polynômes non nuls de F ont le même degré. Montrer que F est une droite vectorielle.

SOUS ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

13. Montrer que $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3/2x-y+3z=0\right\}$ et $G=\text{Vect}\left(u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

14. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $D:\begin{cases}x+y+az=0\\x+by+z=0\end{cases}$ et $P=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$.

a) Justifier que P est un plan. À quelle condition D est-elle une droite?

b) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que D et P soient supplémentaires.

15. Montrer que $\mathscr{P}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R})/f \text{ est paire}\}$ et $\mathscr{I}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R})/f \text{ est impaire}\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

16. Montrer que $\mathscr{F}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R})/f(0)=0\}$ et $\mathscr{G}=\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R})/f \text{ est constante}\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

17. Soit $E=\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On pose $F=\{f\in E/f(0)=0\}$ et $G=\left\{f\in E/\int_0^1 f(t)\,dt=0\right\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et trouver un supplémentaire commun à F et à G.
Indication : F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un type particulier. Lequel?

18. Soit $E=\mathbb{K}_n[X]$. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts et $A=\prod_{k=1}^{n}(X-a_i)$.
À l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que $\mathbb{K}_n[X]=\text{Vect}(A)\oplus\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

APPLICATIONS LINÉAIRES

19. Montrer qu'une forme linéaire sur E est nulle ou surjective.

20. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\forall x\in E$, $(x,f(x))$ est liée.
Montrer que f est une homothétie.

21. Soient $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $g\in\mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $g\circ f=0$ si et seulement si $\text{Im}\,f\subset\ker g$.

22. Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels , $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.

a) Montrer que $\ker f\subset\ker(g\circ f)$ et que $\text{Im}(g\circ f)\subset\text{Im}\,g$.

b) Montrer que $\ker f=\ker(g\circ f)\iff\ker g\cap\text{Im}\,f=\{0_F\}$.

c) Montrer que $\text{Im}(g\circ f)=\text{Im}\,g\iff\ker g+\text{Im}\,f=F$.

23. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, où E est de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les trois conditions suivantes :

(i) $\text{Im}(u^2)=\text{Im}\,u$; *(ii)* $\ker u\oplus\text{Im}\,u=E$; *(iii)* $\ker(u^2)=\ker u$.

Le résultat reste-t-il vrai si l'on enlève l'hypothèse de dimension finie?

24. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $f^p=0$. Le plus petit entier p convenable est appelé ordre (ou indice) de nilpotence de f.
Soit donc f nilpotent d'indice p.

a) Justifier l'existence de cet ordre de nilpotence.

b) Soit $x_0\in E$. Montrer que $(x_0,f(x_0),\dots,f^{p-1}(x_0))$ est libre $\iff f^{p-1}(x_0)\neq 0_E$.

c) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que l'ordre de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est toujours inférieur ou égal à $n=\dim E$.

d) On suppose dans cette question que $p=n$. Soit $x_0\in E$ tel que $f^{n-1}(x_0)\neq 0_E$.
Montrer que $B=(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

25. Noyaux itérés
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u\in\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\text{Ker}(u^k)\subset\text{Ker}(u^{k+1})$.

b) Montrer que la suite de terme général $\dim(\text{Ker}(u^k))$ est constante à partir d'un certain rang, que l'on notera d dans la suite.

c) On note $r_u=\inf\{k\in\mathbb{N},\ \text{Ker}(u^k)=\text{Ker}(u^{k+1})\}$.

(i) Montrer que $r_u\leqslant n$.

(ii) Montrer que $d=r_u$.

(iii) Montrer que $E=\text{Ker}(u^d)\oplus\text{Im}(u^d)$.

(iv) Montrer que $\text{Ker}(u^k)$ et $\text{Im}(u^k)$ sont supplémentaires si et seulement si $k\geqslant d$ ou $k=0$.

26. Soit $E=\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et F la partie de E constituée des éléments de E dérivables en 0 et qui s'annulent en 0.
Si $f\in E$, on note $\varphi(f)$ l'application : $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&x.f(x)\end{array}\right.$.

a) Montrer que F est un s.e.v de E.

b) Montrer que φ définit un endomorphisme de E.

c) Montrer que F est l'image de φ.

d) Quel est le noyau de φ?

27. Soit $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X]&\to&\mathbb{K}[X]\\P&\mapsto&P(X)-P(X-1)\end{array}\right.$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

b) Déterminer son noyau.

c) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ définit une surjection de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.
En déduire que φ est surjective.

28. Soit $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit les endomorphismes P et D de E par $P(f):x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ et $D(f)=f'$ pour tout $f\in E$.

a) Vérifier que $P, D \in \mathscr{L}(E)$; déterminer $P \circ D$ et $D \circ P$.

b) Déterminer les noyaux de $\mathrm{Id} - P$ et $\mathrm{Id} - D$.

c) Étant donné un polynôme g, déterminer les antécédents de g par $\mathrm{Id} - D$.

PROJECTEURS

29. Soit $E = \mathbb{K}^3$, F_1 d'équation $x + 2y + z = 0$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

a) Montrer : $E = F_1 \oplus F_2$.

b) Soit p_1 [resp. p_2] la projection sur F_1 [resp. F_2] parallèlement à F_2 [resp. F_1]. Expression analytique de p_1 et p_2 ?

c) Idem pour les symétries associées.

30. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - (x_1 + x_2 + x_3)V \end{array} \right.$.

Montrer que φ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

31. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b) Montrer que, dans ces conditions, $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

32. Soient p et q des projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

a) Montrer que r est un projecteur.

b) Montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ sont en somme directe.

33. On note S_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $\sigma \in S_n$.

a) Rappeler le cardinal de S_n. Montrer que $\varphi_\sigma : \tau \in S_n \mapsto \tau \circ \sigma \in S_n$ est bijective.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
Montrer que $p_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur et donner ses caractéristiques.

MATRICES

34. Montrer que les ensembles de matrices suivants munis des lois usuelles sont des espaces vectoriels et donner pour chacun d'eux une base et la dimension. Sont-ils des *algèbres* ? commutatives ? unitaires ?

a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ 3y & x \end{pmatrix} \;/\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & -5y \\ y & x + 3y \end{pmatrix} \;/\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

c) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \;/\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

d) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x + z & y - z & 0 \\ y - z & x + y & y - z \\ 0 & y - z & x + z \end{pmatrix} \;/\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

35. Calculs de puissances par des identités algébriques (formule du binôme et autres).

a) Soient $a \in \mathbb{K}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ et $N = A - aI_3$.
Calculer N^3, et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soient x et y deux scalaires, et $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous les indices i et j, on ait $m_{ii} = x$ et $m_{ij} = x + y$ si $i \neq j$. Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c) Soient x, y et z trois scalaires et $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.
Écrire $A = CL$, où C est un vecteur colonne et L un vecteur ligne, puis calculer A^n.

36. Soit, pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice carrée d'ordre n $A_\theta = (a_{ij})$ définie par $a_{ij} = \cos\big((i + j - 2)\theta\big)$.

a) Calculer $C_j + C_{j+2}$ où C_j désigne la j-ème colonne de A_θ.

b) En déduire le rang de A_θ.

37. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{B}$ sa base canonique. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose : $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$.

a) Montrer que Φ définit un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

c) Φ est-il un automorphisme de E ?

d) Déterminer une base de son noyau et de son image.

38. On considère un endomorphisme u dont la matrice dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image et le noyau de u. Les comparer.

b) Calculer la matrice de u^2 sur $\mathscr{B}$, son image et son noyau. Démontrer sans calcul que $u^3 = 0$.

c) Déterminer tous les vecteurs e tels que la famille $(e, u(e), u^2(e))$ soit une base. Déterminer la matrice de u dans une base de ce type.

d) On considère maintenant l'endomorphisme $v = \mathrm{Id}_E + u$. Trouver sans calcul l'image et le noyau de v, la matrice dans $\mathscr{B}$ de v^n et celle de v^{-1}.

39. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

b) L'endomorphisme f est-il surjectif ?

c) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$.

d) Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?

40. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.
Soit, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \text{Vect}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$.

a) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire inférieure $\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ u(F_i) \subset F_i$.

b) En déduire que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Établir le même résultat pour les matrices triangulaires supérieures.

41. Soit $D : p \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P$.

a) Justifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ n'est constituée que de 0 et de 1.

c) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

d) Montrer que si Q est positif sur $\mathbb{R}$, alors P l'est aussi.

42. Théorème de Hadamard.
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que A est inversible. *(Raisonner par l'absurde)*

TRACE

43. Soit E un espace de dimension finie et p un projecteur de E. Montrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

44. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes f et g de E de dimension finie non nulle tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$

45. Soit M une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe une colonne C et une ligne L telles que $M = CL$.

b) En déduire que $M^2 = \operatorname{tr}(M).M$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit la matrice d'un projecteur.

46. ***a)*** Soit A une matrice carrée de format (n, n). Vérifier que l'application $\varphi : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ est une forme linéaire.
Calculer $\varphi(E_{ij})$ (matrices élémentaires).

b) Réciproquement, établir que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de ce type.

47. On sait que la trace est une forme linéaire qui vérifie $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
Réciproquement, on considère une forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

a) Calculer les produits $E_{ik}E_{kj}$ et $E_{kj}E_{ik}$.

b) En déduire la valeur de $\varphi(E_{ij})$ pour tout (i, j) en fonction de $\alpha = \varphi(E_{1,1})$.

c) Démontrer que φ est proportionnelle à la trace.

48. Trouver un supplémentaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de l'ensemble H des matrices de trace nulle. Donner l'expression des projecteurs associés.

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES ET SEV STABLES

49. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes **qui commutent**. Montrer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g.

50. Soient $H = \ker \varphi$ un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que H est stable par u si et seulement si $\varphi \circ u$ et φ sont proportionnelles.

51. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1}.

52. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $f^2 = 4\,\mathrm{Id}_E$.
Montrer que $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

53. Soit E un $\mathbb{K}$−e.v et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose :
$$f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0$$

a) Montrer que f est un automorphisme.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
En déduire une expression de f^n comme combinaison linéaire de f et Id_E.
Pour $n \in \mathbb{Z}$?

c) Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

d) Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_E) + \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) = E$.

54. Calculs de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^2 - 3A + 2I$.
En déduire que A est inversible et son inverse.
Déterminer pour $n \geqslant 2$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $E = \text{Vect}(I, A)$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il est stable par produit.
Calculer A^n en fonction de n.

c) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2(A - 3I_3)$, et en déduire A^n.

55. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

56. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$, avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie, puis dans le cas général.