

Feuille d'exercices
Intégrales à un paramètre

Régularité des intégrales à paramètre

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

- Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
- Justifier que f tend vers 0 en $+\infty$.
- Démontrer que f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Exercice 2 (d'après CCINP 2019 - PSI)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$$

- Montrer que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .
 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .
- En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p .
- Montrer que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Exercice 3 (d'après oraux CCINP MP)

- Énoncer le théorème sous le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
- Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
 b) Résoudre (E) .

Exercice 4 (d'après oraux CCINP MP)

On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

- Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
- Démontrer que Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 5 (d'après CCINP 2016 - MP)

- Soit $x \in]0, +\infty[$.
 Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- On note alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

(fonction Gamma d'Euler)

Démontrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) > 0$.

- Démontrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 6 (d'après CCINP 2015 - PSI)**1. L'intégrale de Gauss**

a) Montrer que l'intégrale de la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est convergente sur \mathbb{R}_+ .

b) Montrer que les fonctions F et G définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G .

c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

d) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

e) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Les fonctions u et v

a) Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(tx)}{\sqrt{x}} dx \quad \text{et} \quad v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin(tx)}{\sqrt{x}} dx$$

sont bien définies et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 7 (d'après CCINP 2020 - PSI)

Pour $x > 0$, on note : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$, $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$

et $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$.

2. Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de G .

5. Trouver une expression simple pour G et pour H .

(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.

6. En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Exercice 8 (d'après Centrale 2023 - PSI)

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f'(x)$.

4. Montrer que g est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$$

6. Vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - (g(x))^2$.

7. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f .
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et démontrer que f est continue sur ce domaine de définition.
2. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$$

En déduire le sens de variation de f .

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 (d'après CCINP 2023 - PSI)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t)) dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 (d'après E3A 2024 MPI)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} à valeurs réelles. On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup \{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1. Questions de cours

Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction \arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.
3. Justifier que \arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.
4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.

On rappelle que la dérivée de la fonction composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ sur un intervalle correctement choisi.

5. Déterminer une expression simple de la fonction $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.
6. Soit f une fonction de E .

a) Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(xt) \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E .

- c) Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.
 7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E .
 8. Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
-

9. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

b) Pour tout $x > 0$, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

c) Pour tout $x > 0$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 21 (d'après E3A 2023 PC)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx) dt$.

1. Étudier la parité des fonctions I_n .

2. Prouver que les fonctions I_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $I'_n(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$.

4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel k , que la fonction I_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} .

Soit n un entier naturel fixé.

5. **Calcul de $I_n(0)$**

a Déterminer, pour tout entier naturel p , une relation entre $I_{p+1}(0)$ et $I_p(0)$.

b En déduire l'expression de $I_n(0)$ à l'aide de factorielles.

6. Calculer la somme : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1) k! (n-k)!}$.

Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.

7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction $u \mapsto \cos(u)$.

8. Montrer que la fonction I_n est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.

Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.

9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on sur la fonction I_n ?

Exercice 22 (d'après E3A 2023 PSI)

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, démontrer : $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

b) Pour tout entier naturel p , justifier que la série $\sum_{n \geq p} (-1)^n a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p .

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p .

4. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

Justifier que la fonction $x \mapsto \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} .

5. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} par $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto e^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\phi'(x) e^{i\phi(x)}$.

a) Démontrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On vérifiera les hypothèses du théorème utilisé.

b) Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2} du$$

Exercice 23 (d'après E3A 2023 MP)

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

- (A) $e^{b \ln(a)}$,
- (B) $e^{a \ln(b)}$,
- (C) $e^{\ln(a) \ln(b)}$.

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$. Comparer t^x et t^y .

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5. a) Déterminer l'ensemble de définition de F .

b) Déterminer le sens de variation de F .

c) Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geq \frac{1}{2}$.

d) Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

e) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

f) Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On admettra que $F'(0) = \frac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \frac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

7. Établir enfin :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$$

Exercice 24 (d'après E3A 2022 PSI)

1. Question de cours

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , à valeurs réelles et T -périodique.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$.

On se propose de déterminer des fonctions y de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0 \tag{**}$$

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

a) Étudier la parité de la fonction F .

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

b) Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x \cos(t))$.

(i) Justifier que la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

(ii) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$ existe et est continue sur $[0, 2\pi]$.

(iii) Soit I un segment de \mathbb{R} . Montrer que pour tout entier naturel k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], 0 \leq \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M_k$$

(iv) En déduire que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(v) Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) Montrer que F vérifie la relation (**).

2. Développement en série entière de F

a) Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

b) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^n dt$.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

c) Calculer J_0 et J_1 .

d) Soit $n \geq 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} .

e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de J_n en fonction de n .

f) Comparer alors les fonctions F et g .

Exercice 25 (d'après E3A 2022 PC)

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Étude de la convergence de la série de terme général u_n

a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

c) Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

2. Calcul de la somme de cette série

a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

b) En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$.

c) **Intégration terme à terme ?**

(i) Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

(ii) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

(iii) Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

On justifiera rigoureusement la réponse.

d) On pose, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t) \quad \text{et} \quad V_n(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 26 (d'après E3A 2022 MP)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ .

b) Démontrer que pour tout $x \in \Delta$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n . On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt$.

a) Justifier l'existence de I_n .

b) En utilisant la question 1. calculer I_n .

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela est possible :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) \exp(-t^2) dt$$

a) Donner le développement en série entière de la fonction \cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

b) Justifier que H est définie sur \mathbb{R} et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question 3.b) par une autre méthode.

a) Démontrer que H est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b) Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c) Retrouver l'expression de H obtenue à la question 3.b)

Exercice 27 (d'après E3A 2022 PC)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, lorsque cela est possible, $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt$.

1. Continuité de f

a) Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur \mathbb{R}_+ la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$.

b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$ est convergente.

c) En déduire que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

d) En déduire que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

2. Régularité de f

a) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$.

On considère $x \in [a, b]$.

(i) Montrer que $\forall t \geq 0, 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

(ii) Montrer que $\forall t > 0, 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leq t e^{-at}$.

(iii) Montrer que $\forall t > 0, 0 \leq \sin^2(t) e^{-xt} \leq e^{-at}$.

b) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et donner pour tout $x > 0$, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. Une autre expression de f''

On note i un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

a) Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, |e^{(i\theta-x)t}| = e^{-xt}$.

b) En déduire : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{(i\theta-x)t}| = 0$.

c) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2 + 4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.