série d'exercice

Intégration sur un intervalle

Exercice 1

Convergence des intégrales suivantes et les calculer dans le cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(zx)dx$ où $z \in \mathbb{C}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x\sqrt{x}}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan(x)}{(x^2+1)^2}dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ch(x)}{ch(3x)}dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$

Exercice 2

Etudier l'intégrabilité de chacune des fonctions suivantes sur I :

1. $\dfrac{1}{t^2}\exp(\dfrac{1}{t})$ sur $I = [1, +\infty[$
2. $\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t^3+t^2+1}}$ sur $I = [1, +\infty[$.
3. $\exp(-t\arctan(t)))$ sur $I = [0, +\infty[$
4. $\exp(-t\sin(t))$ sur $I = [0, +\infty[$
5. $\arccos(\dfrac{t-1}{t})$ sur $I = [1, +\infty[$
6. $\dfrac{\exp(-t)}{\sqrt{\ln(1+t)\sqrt{1-t^2}}}$ sur $I =]0, 1[$.

Exercice 3

Soit $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$.

1. Montrer que g est intégrable sur $[2,+\infty[ssi\ \alpha > 1$.
2. Montrer que si $0 < \alpha < 1$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ existe.Conclure !

Exercice 4

Soit $(a, b) \in R^2$ tel que $a < b$.

1. Determiner les valeurs des réels α et β pour que la fonction t :$\longrightarrow \dfrac{1}{(t-a)^\alpha (b-t)^\beta}$ soit intgrable sur $]a, b[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ (Ind :on effectuera le changement de variable :u=t-$\dfrac{a+b}{2}$)

Exercice 5 Intégrales de Bertrand

Soit l'application $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. Montrer que : $f_{\alpha,\beta}$ est integrable au $v(+\infty) \Leftrightarrow \alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. Montrer que : $f_{\alpha,\beta}$ est integrable au $v(0^+) \Leftrightarrow \alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 6

Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$.

1. Montrer que I converge et que $J = I$.
2. Ecrire que $I = \frac{I+J}{2}$ et faire quelques changements de variable pour trouver que $I = \frac{-\pi}{2}\ln(2)$

Exercice 7

1. a. Montrer que : $t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est intégrable sur $]0,1[$.

   b. Montrer que : $\forall x \in]0,1[\ : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ et $t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ sonts intégrables sur $]0,x[$

2. a. Montrer que : $\forall x \in]0,1[\ , \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt.$

   b. Déduire que : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}dt = \ln(2)$

Exercice 8

Soient $0 < a < b$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(f(at) - f(bt))dt$

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge alors$I$ existe et vaut $f(0)\ln(\frac{b}{a})$.
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ alors I existe et vaut$(f(0) - l)\ln(\frac{b}{a})$. (On pourra examiner $F(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t}(f(at) - f(bt))dt$,$0 < x < y$)
3. Applications : Calculer les intégrales suivantes :
   $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\exp(-at) - \exp(-bt))dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\arctan(3t) - \arctan(2t))dt$; $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}$

Exercice 9 Intégrale de Gauss

1. On note ,pour tout $n \in \mathbb{N}$,$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

   b. Montrer que :$I_{n+1} \sim I_n$ lorsque $n \to +\infty$

   c. En déduire que :$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Soit l'application $f :\mapsto e^{-x^2}$
   a. Montrer que : f est intégrable sur $[0,+\infty[$
   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0,\sqrt{n}]$ on a :
   $$(1-\frac{x^2}{n})^n \leq f(x) \leq (1+\frac{x^2}{n})^{-n}$$
   c. En déduire que : $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 10 *Fonction Gamma*

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1. Montrer que : $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[\Leftrightarrow\ x>0$.
2. Montrer que :$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$,$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. Montrer que :$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Exercice 11 *Fonction Beta*

On pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

1. Montrer que la fonction : $t\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[\Leftrightarrow (x>0$ et $y>0)$
2. Montrer que pour tout $x>0$ et $y>0$: $B(y,x) = B(x,y)$ et $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.

Exercice 12

On considère la fonction $f : t\mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,\pi]$.
2. A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ existe dans $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|dt$
   a. Etudier la suite $(S_n)_n$ définie par : $S_n = u_1+u_2+...+u_n$.
   b. En déduire que f n'est pas intégrable sur $[\pi,+\infty[$

Exercice 13

1. Montrer que :$t\mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ lorsque $x \to +\infty$

Exercice 14

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite l finie en $+\infty$ alors $l = 0$.
2. Montrer que si f est décroissante alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 15

Soit f une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$ .Montrer que $f(x) = o(\frac{1}{x})$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 16

Soit f une fonction continue intégrable sur $[0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$.

Exercice 17

Soit f une fonction continue intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$ existe et finie

Exercice 18

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$,décroissante et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \sin(t)f(t)dt$ existe .

Exercice 19

Soient $T \in]0, +\infty[$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue et T- périodique. Montrer que si f intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $f = 0$.