

Feuille d'Exercices

Intégration

Exercice 1 (★). On admet que les intégrales suivantes (paramétrées par $n \in \mathbb{N}^*$) sont bien définies. Montrer qu'elles convergent vers 0 (quand $n \rightarrow +\infty$), puis déterminer un équivalent de B_n et C_n :

$$\begin{array}{lll}
 1. A_n = \int_1^2 (\ln(t))^n dt & 2. B_n = \int_n^{n+1} \sqrt{x} e^{-x} dx & 3. C_n = \int_0^{1/n} e^t \cos(t^2) dt \\
 4. D_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx & 5. E_n = \int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt & 6. F_n = \int_0^3 \arctan(t) e^{-nt} dt \\
 7. G_n = \int_n^{n^2} e^{-x^2} dx & 8. H_n = \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{t}{n}\right) e^{t^2} dt &
 \end{array}$$

Exercice 2 (★★). Déterminer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$1. A_n = \int_0^1 \sqrt{t} e^{t/n} dt \quad 2. B_n = \int_1^2 x \arctan(nx) dx \quad 3. C_n = \int_{-1}^1 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt \quad 4. D_n = \int_{-1}^2 \frac{e^t}{1+t^{2n}} dt$$

Exercice 3 (★). On définit les suites réelles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n .
3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 (★). Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Étudier sa parité.
2. Déterminer les variations de F sur \mathbb{R} .
3. (★★) Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 5 (★). Soit φ et f les fonctions définies par : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = \frac{e^t}{t}$ et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction φ est continue sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}^* . En déduire les variations de f .
3. A l'aide d'encadrements, déterminer la limite de f en 0^+ et 0^- .
4. Compléter le tableau de variations de f avec les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 6 (★★). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^2 f(t) dt = 2$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 7 (★). Déterminer la limite des suites définies par : $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[2]{k}$.

Exercice 8 (★). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f : t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n \geq 1, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

Exercice 9 (★). Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2$.

Exercice 10 (★). Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 11 (Type DS). Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- (b) Soit $x \in [n, +\infty[$. Minorer $f_n(x)$, puis établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel de $[n, +\infty[$, noté u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
- (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.