PRÉPAS ELBILIA

GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

PSI

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Td-Matrices

$\in$

Matrices

34. Montrer que les ensembles de matrices suivants munis des lois usuelles sont des espaces vectoriels et donner pour chacun d'eux une base et la dimension. Sont-ils des *algèbres*? commutatives? unitaires?

a) $E=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ 3y & x\end{pmatrix} \ / \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

b) $E=\left\{\begin{pmatrix} x & -5y \\ y & x+3y\end{pmatrix} \ / \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

c) $E=\left\{\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y\end{pmatrix} \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

d) $E=\left\{\begin{pmatrix} x+z & y-z & 0 \\ y-z & x+y & y-z \\ 0 & y-z & x+z\end{pmatrix} \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

35. Calculs de puissances par des identités algébriques (formu

a) Soient $a\in\mathbb{K}$, $\quad A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad N=A-aI_3$.

Calculer N^3, et en déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) Soient x et y deux scalaires, et $M=(m_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous les indices i et j, on ait $m_{ii}=x$ et $m_{ij}=x+y$ si $i\neq j$. Calculer M^p pour tout $p\in\mathbb{N}$.

c) Soient x, y et z trois scalaires et $A=\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2\end{pmatrix}$.

Écrire $A=CL$, où C est un vecteur colonne et L un vecteur ligne, puis calculer A^n.

36. Soit, pour $\theta\in\mathbb{R}$, la matrice carrée d'ordre n $A_\theta=(a_{ij})$ définie par $a_{ij}=\cos\big((i+j-2)\theta\big)$.

a) Calculer C_j+C_{j+2} où C_j désigne la j-ème colonne de A_θ.

b) En déduire le rang de A_θ.

37. Soit $E=\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. Pour $P\in\mathbb{K}[X]$, on pose : $\Phi(P)=3XP'+(X^2-1)P''$.

a) Montrer que Φ définit un endomorphisme de E.

b) Écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Φ est-il un automorphisme de E ?

d) Déterminer une base de son noyau et de son image.

38. On considère un endomorphisme u dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image et le noyau de u. Les comparer.

b) Calculer la matrice de u^2 sur $\mathcal{B}$, son image et son noyau. Démontrer sans calcul que $u^3=0$.

c) Déterminer tous les vecteurs e tels que la famille $(e,u(e),u^2(e))$ soit une base. Déterminer la matrice de u dans une base de ce type.

d) On considère maintenant l'endomorphisme $v=\mathrm{Id}_E+u$. Trouver sans calcul l'image et le noyau de v, la matrice dans $\mathcal{B}$ de v^n et celle de v^{-1}.

39. Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M)=AM$.

a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

b) L'endomorphisme f est-il surjectif?

c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

d) Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires?

40. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.
Soit, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$.

a) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire inférieure $\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ u(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}_i$.

b) En déduire que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Établir le même résultat pour les matrices triangulaires supérieures.

41. Soit $\mathrm{D} : p \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}$.

a) Justifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

b) Trouver une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $\mathrm{D} : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ n'est constituée que de 0 et de 1.

c) Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} - \mathrm{P}' = \mathrm{Q}$.

d) Montrer que si Q est positif sur $\mathbb{R}$, alors P l'est aussi.

42. Théorème de Hadamard.
Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$.
Montrer que A est inversible. *(Raisonner par l'absurde)*

Trace

43. Soit E un espace de dimension finie et p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{tr}\, p = \mathrm{rg}\, p$.

44. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes f et g de E de dimension finie non nulle tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$

45. Soit M une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe une colonne C et une ligne L telles que $\mathrm{M} = \mathrm{CL}$.

b) En déduire que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}).\mathrm{M}$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit la matrice d'un projecteur.

46. *a)* Soit A une matrice carrée de format (n, n). Vérifier que l'application $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{AM})$ est une forme linéaire.
Calculer $\varphi(\mathrm{E}_{ij})$ (matrices élémentaires).

b) Réciproquement, établir que toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de ce type.

47. On sait que la trace est une forme linéaire qui vérifie $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$.
Réciproquement, on considère une forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{BA})$.

a) Calculer les produits $\mathrm{E}_{ik}\mathrm{E}_{kj}$ et $\mathrm{E}_{kj}\mathrm{E}_{ik}$.

b) En déduire la valeur de $\varphi(\mathrm{E}_{ij})$ pour tout (i, j) en fonction de $\alpha = \varphi(\mathrm{E}_{1,1})$.

c) Démontrer que φ est proportionnelle à la trace.

48. Trouver un supplémentaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de l'ensemble H des matrices de trace nulle. Donner l'expression des projecteurs associés.

Polynômes d'endomorphismes et sev stables

49. Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ des endomorphismes **qui commutent**. Montrer $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$ sont stables par g.

50. Soient $\mathrm{H} = \ker \varphi$ un hyperplan de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que H est stable par u si et seulement si $\varphi \circ u$ et φ sont proportionnelles.

51. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 - 3f + 6\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$. Montrer que f est inversible et déterminer f^{-1}.

52. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $f^2 = 4\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
Montrer que $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\ker(f + 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ sont supplémentaires dans E.

53. Soit E un $\mathbb{K}-$e.v et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose :
$$f^2 - f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} = 0$$

a) Montrer que f est un automorphisme.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$.
En déduire une expression de f^n comme combinaison linéaire de f et Id_E.
Pour $n \in \mathbb{Z}$?

c) Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \cap \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.

d) Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

54. Calculs de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur.

a) Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}$.
En déduire que A est inversible et son inverse.
Déterminer pour $n \geqslant 2$, le reste de la division euclidienne de X^n par $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$.
En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{A})$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il est stable par produit.
Calculer A^n en fonction de n.

c) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{A}^2(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_3)$, et en déduire A^n.

55. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Montrer que : $\mathrm{E} = \ker(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

56. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P}(f) = 0$, avec $\mathrm{P}(0) = 0$ et $\mathrm{P}'(0) \neq 0$.
Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie, puis dans le cas général.