My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Résumé de Cours
Déterminants

1. Formes multilinéaires alternées

1.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application f, de E^n dans $\mathbb{K}$, est une forme n-linéaire si chacune de ses applications partielles

$$x_i \mapsto f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$$

est linéaire.

On dit de plus que f est alternée si $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_p)=0$ dès que deux coordonnées, au moins, sont égales.

f étant une forme n-linéaire alternée, σ une permutation appartenant à $\mathcal{S}_n$, de signature $\varepsilon(\sigma)$, on a :

$$f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,\ldots,x_n)\,\varepsilon(\sigma)\,.$$

1.2 Cas où dim $E=n$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, il existe une forme n-linéaire alternée unique f telle que

$$f(e_1,\ldots,e_n)=\lambda\,.$$

f étant une forme n-linéaire alternée non nulle, on a :

$$(x_1,\ldots,x_n)\text{ famille liée de }E \Longleftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=0\,.$$

2. Déterminants

2.1 Déterminant de n vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

On appelle déterminant de n vecteurs $x_1,\ldots,x_n$ de E, relativement à la base $\mathcal{B}$ de E, la valeur notée $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ de l'unique forme n-linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1,\ldots,e_n)=1$.

Si pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on décompose $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j$, alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \times a_{1,\sigma(1)} \times \ldots \times a_{n,\sigma(n)}\,.$$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ une matrice carrée d'ordre n.

On appelle déterminant de A le déterminant de ses n vecteurs colonnes, considérés comme éléments de $\mathbb{K}^n$ rapporté à sa base canonique.

2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Après avoir montré que deux matrices semblables ont le même déterminant, on appelle déterminant d'un endomorphisme f, le déterminant commun à ses matrices représentatives.

3. Propriétés des déterminants

3.1 Transposée

$$\det A = \det {}^t A\,.$$

> Les propriétés relatives aux colonnes sont donc aussi valables pour les lignes.

3.2 Propriétés d'une forme multilinéaire alternée

- On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Cette propriété est très utilisée pour faire apparaître des 0 sur une colonne (resp. ligne).
- Multiplier une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire, c'est multiplier le déterminant par ce scalaire.

> Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ puisqu'on peut mettre λ en facteur dans chacune des n colonnes de A.

- Toute transposition sur les lignes (ou les colonnes) transforme $\det A$ en $-\det A$.

3.3 Produit

$$\det\,(A\,B) = \det A \times \det B\,.$$

3.4 Développement suivant une rangée

• **Définitions**

On appelle mineur de l'élément a_{ij} de Δ, déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de Δ, sans changer l'ordre des autres rangées.

Notation : D_{ij}.

On appelle cofacteur de l'élément a_{ij}, le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

• **Théorème**

Un déterminant est égal à la somme des produits deux à deux des éléments d'une rangée (ligne ou colonne) par leurs cofacteurs.

On utilise ce résultat après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros.

> Ce mode de calcul peut aussi servir de définition par récurrence d'un déterminant après avoir démontré que le résultat du développement est indépendant de la ligne, ou de la colonne, considérée.
>
> C'est une définition plus accessible pour tous ceux que rebute un trop grand formalisme mathématique.

• **Application**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

3.5 Calcul par blocs

Soit M une matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où A et D sont des matrices carrées. On a :

$$\det M = \det A \times \det D\,.$$

3.6 Matrice carrée inversible

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0\,.$$

On a alors $\det (A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

4. Quelques applications mathématiques des déterminants PSI

4.1 Calcul possible pour A^{-1}

Cette méthode est quasi-impraticable si $n > 3$.

- On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de A, appelée comatrice de A.
- On transpose la comatrice de A.
- On divise par $\det A$.

4.2 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice quelconque A, est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

4.3 Formules de Cramer

La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$ est donnée par :

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ième colonne par la colonne des seconds membres B.

Ces formules sont utiles quand les coefficients du système dépendent d'un, ou plusieurs, paramètre. Sinon la méthode du pivot de Gauss est préférable.