My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Structure d'espace vectoriel

1. Définitions et premières propriétés

1.1 Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps d'éléments neutres notés 0 et 1.

On dit qu'un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il est muni

- d'une loi de composition interne notée $+$,
- d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E : $(\lambda,x) \mapsto \lambda\, x$,

telles que :

$(E,+)$ est un groupe commutatif,

$\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad (\lambda\,\mu)\,x = \lambda\,(\mu\,x) \quad ;$

$$(\lambda + \mu)\,x = \lambda\,x + \mu\,x \quad ; \quad \lambda\,(x + y) = \lambda\,x + \lambda\,y \quad ; \quad 1\,x = x.$$

Les éléments de E sont des vecteurs ; les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

1.2 Exemples

- L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de n espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n)$$
$$\lambda\,(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda\,x_1,\ldots,\lambda\,x_n)$$

- L'ensemble $\mathcal{F}(X,F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F, est un espace vectoriel pour les opérations $f + g$ et $\lambda\,f$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1.3 Propriété

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \qquad \lambda x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E .$$

De ce fait, les éléments neutres de $\mathbb{K}$ et de E, 0_K et 0_E, seront représentés par le même symbole 0 sans inconvénient.

2. Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Une partie non vide F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si elle est stable pour les deux lois, et si la restriction à F des lois de E y définit une structure d'espace vectoriel.

En fait, il faut et il suffit que F vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \qquad x + y \in F \qquad \lambda x \in F \ ;$$

ou encore :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \qquad x + \lambda y \in F .$$

Pour montrer que F n'est pas vide, on vérifie en général que $0 \in F$.

2.2 Sous-espace engendré par une partie

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Attention, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

- L'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant une partie A donnée est le sous-espace vectoriel engendré par A. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant A.

  On dit aussi que A est une partie génératrice de F. On note $F = \mathrm{Vect}(A)$.

- Le sous-espace vectoriel engendré par A est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de A, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs du type :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \quad x_i \in A .$$

2.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de E_1 et de E_2, et on note $E_1 + E_2$, l'ensemble des vecteurs du type $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$E_1 + E_2$ est le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

2.4 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

- **Définitions**

Quand tout vecteur x de $F = E_1 + E_2$ s'écrit, de façon unique, sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on dit que F est somme directe de E_1 et de E_2, et on note $F = E_1 \oplus E_2$.

On dit aussi que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans F.

- **Théorème**

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0\}\,.$$

2.5 Généralisation

- **Somme de sous-espaces vectoriels**

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle somme des E_i, et on note $\sum_{i \in I} E_i$, l'ensemble des vecteurs du type $\sum_{i \in I} x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.

$\sum_{i \in I} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} E_i$.

Si $I = \{1,\ldots,n\}$, la somme se note aussi $E_1 + \cdots + E_n$.

- **Somme directe de sous-espaces vectoriels**

Quand tout vecteur x de $\sum_{i \in I} E_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$, on dit que la somme des E_i est directe et on la note $\bigoplus_{i \in I} E_i$.

Si $I = \{1,\ldots,n\}$, on note aussi $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Pour démontrer que la somme des E_i est directe, la méthode la plus rapide est de partir d'une somme nulle $x_1 + \cdots + x_n = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, et de démontrer que cela entraîne que tous les x_i sont nuls.

Dimension d’un espace vectoriel

1. Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Dépendance et indépendance linéaire

- On dit qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est une famille libre, ou que les vecteurs sont linéairement indépendants, si :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i = 0 \Longrightarrow \quad \forall i \quad \lambda_i = 0 \, .$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, ou que les vecteurs sont linéairement dépendants.

- Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.

- Pour qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ soit liée, il faut, et il suffit, que l'un de ses éléments soit combinaison linéaire des autres.

> Cas particuliers : une famille qui contient le vecteur 0 est liée ; deux vecteurs sont liés si, et seulement si, ils sont colinéaires.

1.2 Bases

- On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille libre de E qui engendre E.

- $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur x de E peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \, .$$

Les scalaires x_i sont les composantes du vecteur x.

- **Théorème de la base incomplète**

Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

- Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ possède au moins une base.

Attention à ne jamais dire *la* base de E, car il n'y a pas unicité.

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

Si E possède une base comportant un nombre fini n de vecteurs, on dit que E est de dimension finie.

Dans ce cas, toute base de E comporte aussi n vecteurs. On dit que n est la dimension de E ; on la note $\dim E$.

On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

1.4 Recherche de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Toute famille libre de E a au plus n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.

Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.

Si on connaît déjà la dimension n de E, et si on considère une famille de n vecteurs, pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer : soit que la famille est libre, soit que la famille est génératrice.

2. Autres dimensions

2.1 Dimension de $E \times F$

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, et $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F, alors l'ensemble des couples $(e_i,0)$ et $(0,f_j)$ où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, est une base de $E \times F$.

Par conséquent $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

2.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim F \leqslant \dim E.$$

D'autre part, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

L'égalité des dimensions ne suffit pas pour conclure que $F = E$. Il faut aussi une inclusion.

Si $\dim F = \dim E - 1$, on dit que F est un hyperplan de E.

Comme exemples d'hyperplans, vous pouvez penser à une droite dans le plan ou à un plan dans l'espace.

2.3 Dimension d'une somme

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)\,.$$

En particulier, si F et G sont supplémentaires :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G\,.$$

- Tout sous-espace vectoriel F de E admet des supplémentaires, qui ont tous pour dimension : $\dim E - \dim F$.
- F et G sont supplémentaires si, et seulement si, en réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.

On dit qu'on a choisi une base de E adaptée à la somme directe.

Attention à ne pas partir d'une base de E, car il n'y a aucune raison de pouvoir en extraire une base de F et une base de G, ni même des vecteurs de F ou de G.

- **Généralisation**

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim \bigoplus_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i\,.$$

Si la somme $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est directe, alors, pour que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, il faut et il suffit que :

$$\dim E = \sum_{i\in I} \dim E_i\,.$$

Si aucun E_i n'est réduit à $\{0\}$, la réunion d'une base de chaque E_i constitue une base de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

2.4 Rang

Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille.

Applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1. Généralités

1.1 Définitions

Une application f de E dans F est dite linéaire si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \;\; ; \;\; f(\lambda x) = \lambda f(x)\,.$$

ou encore :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\,.$$

La propriété précédente s'étend à toute combinaison linéaire :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,.$$

Si f est bijective, c'est un isomorphisme ; si $E = F$, c'est un endomorphisme ; si f est bijective avec $E = F$, c'est un automorphisme.

On note :

$\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F,

$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E,

$\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

1.2 Opérations algébriques

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Si f est un isomorphisme, f^{-1} est aussi un isomorphisme.

$\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$, on a $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre.

$(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe, appelé groupe linéaire de E.

2. Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Définitions

Soit f une application linéaire de E dans F.

- L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f, et noté $\mathrm{Im} f$. Il est engendré par les images des vecteurs d'une partie génératrice de E.

- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

En particulier, $\overset{-1}{f}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le noyau de f, et on le note $\mathrm{Ker} f$.

2.2 Théorème

$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im} f = F \qquad ; \qquad f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker} f = \{0\}.$$

2.3 Noyau d'une restriction

Soit f une application linéaire de E dans F et E_1 un sous-espace vectoriel de E.

La restriction de f à E_1 a pour noyau :

$$\mathrm{Ker}\big(f_{|E_1}\big) = \mathrm{Ker} f \cap E_1 .$$

La restriction de f à tout supplémentaire G de $\mathrm{Ker} f$ définit donc un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im} f$.

2.4 Réflexe utile

$$f \circ g = 0 \iff \mathrm{Im} g \subset \mathrm{Ker} f .$$

3. Image d'une famille de vecteurs

Soit f une application linéaire de E dans F.

3.1 Image d'une famille génératrice

Si G engendre E, alors $f(G)$ engendre $f(E)$.

L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si, et seulement si, f est surjective.

3.2 Image d'une famille libre

Si A est une partie liée dans E, alors $f(A)$ est une partie liée dans F, ou, par contraposition :

$$f(A) \text{ libre dans } F \Longrightarrow A \text{ libre dans } E.$$

f est injective si, et seulement si, pour toute partie libre L de E, $f(L)$ est une partie libre de F.

3.3 Image d'une base

L'image d'une base de E est une base de F si, et seulement si, f est bijective.

4. Rang d'une application linéaire

4.1 Théorème noyau-image

Soit f une application linéaire de E dans F. Si $E = \operatorname{Ker} f \oplus G$, la restriction de f à G est un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.

4.2 Théorème du rang

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

$\dim \operatorname{Im} f$ est appelé rang de f, et souvent noté $\operatorname{rg} f$.

4.3 Théorème

Si E et F sont de même dimension finie, on a :

$$f \quad \text{bijective} \Longleftrightarrow f \quad \text{injective} \quad \Longleftrightarrow f \text{ surjective}.$$

N'oubliez pas l'hypothèse sur E et F.

4.4 Forme linéaire et hyperplan PSI

- **Forme linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

On l'appelle l'espace dual de E et on le note E^*.

Si E est de dimension finie, on a $\dim E = \dim E^*$.

- **Écriture d'une forme linéaire**

Si E est de dimension finie et admet $(e_1,\ldots,e_n)$ pour base, toute forme linéaire f sur E est de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i$$

où les $\alpha_i = f(e_i)$ sont des scalaires qui caractérisent f.

- **Forme linéaire et hyperplan**
  - Étant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E.

Toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.

  - En dimension finie, un hyperplan admet donc une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = 0\,.$$

- **Base duale**

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les formes linéaires coordonnées $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ définies par

$$\forall i \quad \forall j \qquad \varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

constituent une base $\mathcal{B}^*$ de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$.

Le symbole de Kronecker δ_i^j vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.

On a donc $\quad \dim E = \dim E^*$.

5. Détermination d'une application linéaire

- Soit $A = (a_1,\ldots,a_n)$ une base de E et $B = (b_1,\ldots,b_n)$ une famille de n vecteurs de F.

Il existe une application linéaire unique f de E dans F telle que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad f(a_i) = b_i\,.$$

• On a : f injective $\iff$ B libre dans F ;
f surjective $\iff$ B engendre F ;
f bijective $\iff$ B est une base de F.

• **Conséquence** : deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, $\dim E = \dim F$.

53 Applications linéaires particulières

1re année

1. Homothétie

Soit $k \in K^*$. L'homothétie de rapport k est l'application :

$$h_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$$

Dans cette définition, n'oubliez pas que k ne dépend pas de x.

2. Projections et symétries

2.1 Définitions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

L'application p de E dans E : $x \mapsto p(x) = x_1$ est linéaire.

C'est la projection sur F, parallèlement à G.

L'application s_F de E dans E : $x \mapsto s_F(x) = x_1 - x_2$ est linéaire.

C'est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.

On définit de même la projection q sur G, parallèlement à F, et la symétrie s_G par rapport à G, parallèlement à F.

2.2 Propriétés

$$p + q = \mathrm{Id}_E \;\; ; \;\; p \circ q = q \circ p = 0 \;\; ; \;\; p^2 = p \;\; ; \;\; q^2 = q \;\; ; \;\; s_F^2 = \mathrm{Id}_E .$$

$$\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q = G \quad ; \quad \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p = F .$$

p et s_F sont liées par l'égalité :

$$s_F = 2p - \mathrm{Id}_E .$$

2.3 Projecteurs

D'une facon générale, on appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

On a alors :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p\,,$$

et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Attention, l'égalité $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ entraîne seulement que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, et pas que f soit un projecteur.

2.4 Symétries

D'une facon générale, on appelle symétrie de E toute application linéaire s, de E dans E, telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Alors $F = \{x \in E\ ;\ s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E\ ;\ s(x) = -x\}$ sont des sous-espaces supplémentaires de E, et s est la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.