My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Résumé de Cours
Calcul matriciel

1. Opérations sur les matrices

1.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \text{et} \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

> Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même format.

Pour ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

- Pour $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,p\}$ fixés, on note E_{ij} la matrice dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est égal à 1, et dont les autres coefficients sont égaux à 0. $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui est donc de dimension $n\,p$.
- La bijection canonique φ de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

1.2 Produit de matrices

Si A est de format (n,p) et B de format (p,q), on définit la matrice $C = AB$, de format (n,q), par :

$$\forall i \quad \forall j \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,.$$

> Attention à la condition d'existence de AB :
>
> nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B.

Ce produit est la traduction de la composée des applications linéaires $f \circ g$.

Il en a donc les propriétés : il est associatif et non commutatif.

2. Matrices carrées d'ordre n

2.1 Structures algébriques

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Les matrices diagonales, les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) constituent des sous-algèbres.

2.2 Formule du binôme de Newton

Si A et B commutent, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

N'oubliez pas de vérifier la condition $AB = BA$.

2.3 Matrices inversibles

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Si B existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forment un groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, isomorphe au groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$. On a en particulier :

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.$$

Si A est inversible, l'endomorphisme f de E, muni d'une base $\mathcal{B}$, qui lui est associé est inversible ; et A^{-1} est la matrice de f^{-1}.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour que A soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à droite, ou à gauche.

3. Transposition

3.1 Définition

La transposée d'une matrice A de format (n,p), est la matrice de format (p,n), notée ${}^tA$, de terme général b_{ij} :

$$\forall i \in \{1,\ldots,p\} \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\} \qquad b_{ij} = a_{ji}.$$

Elle est donc obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

3.2 Propriétés

$$^t\left({}^tA\right) = A \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad ; \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad ;$$

$$^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA \quad ; \quad {}^t\left(A^{-1}\right) = ({}^tA)^{-1}\,.$$

3.3 Matrices symétriques, antisymétriques

Une matrice carrée A est symétrique si ${}^tA = A$,

antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.4 Inverse de la transposée

Si A est inversible, ${}^tA$ l'est aussi et on a :

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})\,.$$

Changements de bases

1. Changement de bases

1.1 Matrice de passage

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice P dont les colonnes C_j sont les composantes des vecteurs e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

P est la matrice de l'identité de E muni de $\mathcal{B}'$, dans E muni de $\mathcal{B}$.

Si P' est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, on a $P\ P' = P'\ P = I_n$.

Toute matrice de passage est donc inversible.

Réciproquement, toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de passage.

1.2 Effet d'un changement de bases

- **sur les coordonnées d'un vecteur**

Si X est la matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$, et X' la matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX', \quad \text{ou encore} \quad X' = P^{-1}X.$$

- **sur l'expression d'une forme linéaire**

Si une forme linéaire sur E est représentée par une matrice ligne $U = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, et par U' dans une base $\mathcal{B}'$, on a $f(x) = UX = U'X'$, soit :

$$U' = U\ P.$$

1.3 Matrices équivalentes, matrices semblables

Soit f une application linéaire de E dans F, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,

Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$,

A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,

A' la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

On a alors :

$$A' = Q^{-1} A \, P.$$

Les matrices A et A' sont dites équivalentes. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Si $E = F$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, alors $P = Q$, soit $A' = P^{-1} A \, P$.

Les matrices A et A' sont dites semblables.

2. Rang d'une matrice

2.1 Définition

Soit A une matrice de format (n,p), E un espace vectoriel de dimension p, F un espace vectoriel de dimension n.

Quelles que soient les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ choisies dans E et F, le rang de l'application linéaire f associée à A est toujours le même. Ce rang est appelé rang de A.

C'est aussi le rang des vecteurs colonnes de A, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

2.2 Rang de la transposée

A et ${}^tA$ ont même rang. On peut donc définir le rang de A à partir de ses lignes.

2.3 Théorème

Une matrice de format (n,p) est de rang r (avec $r \leqslant \min(n,p)$) si, et seulement si, elle est de la forme $U \, J_r \, V$ où U et V sont des matrices carrées inversibles et J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par son terme général :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En particulier, une matrice carrée d'ordre n est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.

2.4 Calcul du rang

Les opérations élémentaires sur les lignes, ou les colonnes, d'une matrice ne modifient pas le rang. On les utilise pour se ramener à une matrice de rang connu.

3. Trace d'une matrice

3.1 Définition

La trace d'une matrice $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre n, est la somme de ses éléments diagonaux, soit :

$$\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}\,.$$

3.2 Propriétés

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B \quad ; \quad \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}A$$
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \quad ; \quad \mathrm{tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{tr}M.$$

Attention, en général $\quad \mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)\,.$

3.3 Trace d'un endomorphisme

- **Définition**

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les matrices qui le représentent sont semblables et ont la même trace.

Cette trace commune est la trace de l'endomorphisme f.

- **Trace d'un projecteur**

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.