Fonctions définies par une intégrale

1. Cas de l'intégrale définie

1.1 Existence et continuité

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $[a,b]\times[c,d]$; alors la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

1.2 Dérivabilité

Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[a,b]\times[c,d]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et on a :

$$F'(x)=\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Si de plus, u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $[c,d]$, alors la fonction G définie par $G(x)=\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et

$$G'(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t+f\big(x,v(x)\big)\,v'(x)-f\big(x,u(x)\big)\,u'(x)\,.$$

2. Cas de l'intégrale généralisée

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $I\times]a,+\infty[$.
Lorsqu'elle existe, on considère la fonction F définie sur I par

$$F(x)=\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2.1 Existence et continuité

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

alors F existe et est continue sur I.

2.2 Dérivabilité

Supposons en plus que f admette une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I\times]a,+\infty[$ et qu'il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant h(t)$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2.3 Remarques

- Le théorème précédent se généralise pour les dérivées successives de F.
- Pour la continuité et les dérivabilités successives, il suffit d'établir les hypothèses de domination du type $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ sur tout segment de I.