PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

PSI

Fiche de Cours

Séries numériques

1. Séries à termes réels ou complexes

1.1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite (S_n) est convergente vers S. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

Dans le cas d'une série convergente, on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On dit que S est la somme de la série, que S_n est la somme partielle d'ordre n et que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S = S_n + R_n$ et il est équivalent de dire que la série $\sum u_n$ converge ou que $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n tend vers 0.

> Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

1.3 Espace vectoriel des séries convergentes

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes respectives U et V alors, pour tous nombres a et b, la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et a pour somme $aU + bV$.

1.4 Cas des séries complexes

Soit $u_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$. La série complexe $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \, .$$

1.5 Critère de Cauchy PSI

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) est de Cauchy (*cf.* fiche.26), c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n > N \qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \, .$$

2. Séries à termes positifs

2.1 Caractérisation

Pour qu'une série de termes réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

2.2 Comparaison de deux séries

- **Théorème de comparaison**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

- **Utilisation d'équivalents**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

Ce théorème s'applique aussi à des séries à termes < 0, mais il n'est pas vrai pour des séries quelconques.

- **Règle de Riemann**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Si $n^\alpha u_n$ est majoré avec $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si $n^\alpha u_n$ est minoré par $A > 0$ avec $\alpha \leqslant 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

- **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.
Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

2.3 Comparaison d'une série à une intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

3. Convergence absolue

3.1 Définition et théorème

- **Définition**

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

- **Théorème**

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente et sa somme vérifie :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\,.$$

La réciproque est fausse.

Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

3.2 Produit de deux séries PSI

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Le produit des deux séries est la série de terme général :

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q\,.$$

Cette série est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

4. Séries de référence

4.1 Séries géométriques

La série de terme général (réel ou complexe) $u_n = aq^n$ est convergente (absolument) si, et seulement si, $|q| < 1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a\,\frac{1}{1-q}\cdot$$

4.2 Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

En particulier, la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique*.

4.3 Série exponentielle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

5. Séries alternées

5.1 Définition

Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général change de signe alternativement.

En supposant $u_0 \geqslant 0$, on a donc $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = |u_n|$.

5.2 Critère spécial des séries alternées

- **Théorème**

Si la suite de termes positifs (a_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ est convergente.

- **Exemple**

La série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

- **Majoration du reste**

Dans les hypothèses du critère spécial des séries alternées, les suites $\left(S_{2n}\right)$ et $\left(S_{2n+1}\right)$ sont adjacentes.

Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et vérifie :

$$|R_n| \leqslant a_{n+1}\,.$$