My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Suites de fonctions

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites de fonctions

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Convergence simple

La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, de I dans K, si :

$$\forall x \in I \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

1.2 Convergence uniforme

f étant la limite simple de la suite (f_n), on dit que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur I si :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

où $\quad \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Le nombre $\|f_n - f\|_\infty$ se calcule souvent avec l'étude des variations de la fonction $f_n - f$.

Quand ce calcul est trop difficile, cherchez à minorer ou à majorer.

La convergence uniforme de (f_n) vers f entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse.

1.3 Continuité de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Si les f_n sont continues sur I, et si f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme.

Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment inclus dans I, pour que f soit continue sur I.

1.4 Intégration de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Si cette égalité n'a pas lieu, alors la convergence n'est pas uniforme.

1.5 Dérivation de la limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans I, convergeant en un point $a \in I$.

Si la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I, alors la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans I qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\,.$$

2. Approximations uniformes

- Toute fonction f de $[a,b]$ dans K, continue par morceaux, peut être approximée uniformément par des fonctions en escalier, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que :

$$\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

- Toute fonction f continue de $[a,b]$ dans K, peut être approximée uniformément par des fonctions polynomiales, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale g telle que :

$$\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

- Toute fonction f continue et T-périodique peut être approximée uniformément par des polynômes trigonométriques de même période, c'est-à-dire des combinaisons linéaires d'expressions de la forme $\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2\pi}{T}\,kx\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Séries de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On considère les sommes partielles définies par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \, .$$

1. Convergence simple

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur I si la suite (S_n) converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) \, .$$

2. Convergence uniforme

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I si la suite (S_n) converge uniformément sur I.

3. Convergence normale

3.1 Définition

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si la série des normes $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge.

3.2 Condition nécessaire et suffisante

La série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs a_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leqslant a_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

La recherche de a_n peut se faire par majoration ou en étudiant les variations de u_n.

3.3 Théorème

La convergence normale de $\sum_n u_n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_n u_n$ et, pour tout $x \in I$, la convergence absolue de $\sum_n u_n(x)$.

Si vous êtes optimiste (et en $\boxed{\text{PC}}$ vous n'avez pas le choix), pour étudier le mode de convergence d'une série de fonctions, commencez par la convergence normale sur I, ou sur tout segment de I.

C'est souvent facile à faire, et, si ça marche, c'est un mode de convergence qui entraîne tous les autres.

4. Propriétés

Pour une série $\sum_n u_n$ qui converge uniformément (normalement entraîne cette condition) sur I, les théorèmes sur les suites de fonctions conduisent à :

4.1 Continuité

Si les u_n sont continues sur I, alors la somme S est continue sur I.

4.2 Intégration

Si les u_n sont continues dans I et si $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I, alors, pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$

On dit que l'on a intégré terme à terme la série.

4.3 Dérivation

Si les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et si $\sum_n u_n'$ converge uniformément, alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\forall x \in I \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k'(x)\,.$$

On dit que l'on a dérivé terme à terme la série.