Prof. MAMOUNI
myismail.net

PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LEON L'AFRICAIN
Classe PSI

Résumé de Cours
Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Construction rapide de $\mathbb{K}[X]$

Nous allons construire les polynômes indépendamment de la notion de fonction, comme la simple succession de ses coefficients. Les polynômes servent en effet à bien d'autres choses qu'à construire des fonctions.

On rappelle que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$: A est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$.

La suite A sera aussi notée $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$.

Une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite *à support fini* si elle est nulle à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, a_n = 0$$

On l'appellera *polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$. Les termes de la suite sont appelés *coefficients* du polynôme.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Il est clair que $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Le *polynôme nul* est :

$$0_{\mathbb{K}[X]} = (0, 0, 0, \dots)$$

Si P est un polynôme, il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$P = (\ a_0\ ,\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_N\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ \dots)$$

Par définition deux polynômes $P = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ sont égaux si, et seulement si tous leurs coefficients sont égaux :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = b_k$$

1.2 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Si $P = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ sont deux polynômes on définit leur *somme* $P + Q$ par :

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

Cette addition est évidemment *associative* et *commutative*. L'élément neutre est $0_{\mathbb{K}[X]}$:

$$P + 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} + P = P$$

On définit le *produit* $P \times Q$, aussi noté PQ, par :

$$P \times Q = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

où on a posé pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Cette opération est elle aussi *associative* et *commutative*. L'élément neutre est $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \dots)$:

$$P \times 1_{\mathbb{K}[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]} \times P = P$$

La mulptiplication est *distributive par rapport à l'addition*. Si R est un autre polynôme de $\mathbb{K}[X]$:

$$P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$$

On définit aussi la *multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda.P = (\lambda \times a_0, \lambda \times a_1, \lambda \times a_2, \dots)$$

Le polynôme $(-1).P$ est noté $-P$ et on l'appelle *opposé* de P. L'opération $P + (-1).Q$ est noté $P - Q$. On a évidemment $P - P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

La multiplication par un scalaire est compatible avec le produit dans le sens suivant :

$$\lambda.(P \times Q) = (\lambda.P) \times Q = P \times (\lambda.Q)$$

1.3 L'indéterminée X

On note X la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x_n = 0$. Avec d'autres notations :

$$X = (\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,\dots)$$

⚠ Ne pas perdre de vue que la lettre X désigne un polynôme et non un élément de l'ensemble $\mathbb{K}$ des scalaires.

On vérifie facilement que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X^k = (\,0\,,\,\dots\,,\,0\,,\,\underset{\substack{\uparrow \\ (k+1)-\text{ième}}}{1}\,,\,0\,,\,0\,,\,\dots)$$

avec la convention $X^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$.

Tout polynôme $P = (\,a_0\,,\,a_1\,,\,\dots\,,\,a_N\,,\,0\,,\,0\,,\,\dots)$ peut donc désormais se noter :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_N X^N = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$$

où pour simplifier les notations on note a_0 à la place de $a_0 1_{\mathbb{K}[X]} = a_0 X^0$.

Pour se remémorer que X est l'indéterminée, le polynôme P est aussi noté $P(X)$.

⚠ $P(X)$ ne désigne pas une fonction évaluée en X, mais un polynôme.

Résumé des premières propriétés.

- L'*unicité des coefficients* peut s'énoncer ainsi :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k X^k = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \Longleftrightarrow \forall k \in [\![0, N]\!],\ a_k = b_k$$

- *Multiplication d'un polynôme par un scalaire* :

$$\lambda. \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = \sum_{k=0}^{N} (\lambda \times a_k) X^k$$

- *Somme de deux polynômes* :

$$\sum_{k=0}^{N_1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{N_2} b_k X^k = \sum_{k=0}^{\max(N_1,N_2)} (a_k + b_k) X^k$$

  avec la convention que $a_k = 0$ si $k > N_1$ et $b_k = 0$ si $k > N_2$.
  En particulier :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k X^k + \sum_{k=0}^{N} b_k X^k = \sum_{k=0}^{N} (a_k + b_k) X^k$$

- *Produit de deux polynômes* :

$$\left(\sum_{k=0}^{N_1} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{N_2} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} c_k X^k$$

  où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ avec la convention que $a_k = 0$ si $k > N_1$ et $b_k = 0$ si $k > N_2$.
  En particulier :

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{N} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{2N} c_k X^k$$

  où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ avec la convention que $a_k = b_k = 0$ si $k > N$.

⚠ Dans l'écriture $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ l'entier N n'est pas unique. En effet, il désigne un rang à partir duquel les coefficients du polynôme sont nuls, donc si N convient alors $N+1$, $N+2, \ldots$ conviennent aussi. Par conséquent on utilise aussi la notation :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où la somme infinie a un sens puisque ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Les propriétés suivantes sont alors plus simples à écrire :

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = b_k \\ \displaystyle\lambda . \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times a_k) X^k \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \\ \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \qquad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \end{array}}$$

Vocabulaire. Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé *monôme* (resp. *binôme*, resp. *trinôme*).

✎ ***Exemple.*** $P(X) = 2X^2 + X^5$ est un binôme ; $Q(X) = -X^3$ est un monôme.

Un polynôme est donc une somme de monômes.

Avec les règles de calculs données précédemment, on peut montrer une formule du binôme pour les polynômes.

Théorème 1 – Formule du binôme pour les polynômes

Si P et Q sont deux polynômes et n un entier naturel alors :

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . P^k . Q^{n-k}$$

De plus si n est un entier naturel non nul on a par télescopage :

$$P^n - Q^n = (P-Q) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}\right)$$

et donc :

$$P^n - 1_{\mathbb{K}[X]} = (P - 1_{\mathbb{K}[X]}) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} P^k\right)$$

ce qu'on peut voir comme une généralisation des sommes géométriques à $\mathbb{K}[X]$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ en regardant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.

1.4 Degré d'un polynôme

On se donne $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. Par définition d'un polynôme il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k > N \Longrightarrow a_k = 0$$

Si on suppose de plus que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors : $\exists k \in [\![0, N]\!]; a_k \neq 0$

Définition 2 – Degré d'un polynôme non nul

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors on appelle *degré de* P l'entier naturel défini par :

$$\deg(P) = \max\left\{k \in \mathbb{N};\ a_k \neq 0\right\}$$

Avec les notations précédentes on a $\deg(P) = \max\left\{k \in [\![0, N]\!];\ a_k \neq 0\right\}$, donc on est sûr que *le maximum existe* puisqu'il est pris dans un ensemble *fini* (inclus dans $[\![0, N]\!]$).

Théorème 3 – Unicité de l'écriture d'un polynôme non nul

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors :

1. P s'écrit de manière unique $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ avec $N \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $\boxed{a_N \neq 0}$;
2. dans ce cas $N = \deg(P)$.

On adopte la convention : $\deg\left(0_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$.

En général, pour un polynôme P quelconque, on a donc $\deg(P) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X];\ \deg(P) \leq n\right\}$$

Il est clair que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$, que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et plus généralement que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad n \leq m \Longrightarrow \mathbb{K}_0[X] \subseteq \mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_m[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$$

Les éléments de $\mathbb{K}_0[X]$ sont appelés *polynômes constants*. On a donc :

$$P \text{ est un polynôme constant } \Longleftrightarrow \deg(P) \leq 0 \Longleftrightarrow \left(P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } \left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \deg(P) = 0\right)\right)$$

Les polynômes constants se notent $P(X) = a 1_{\mathbb{K}[X]}$, ou encore par abus de notation $P(X) = a$, avec $a \in \mathbb{K}$.

Pour tout polynôme P non nul, noté $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$, on appelle :

- *terme dominant de P* le monôme de plus haut degré, qui est ici $a_n X^n$;
- *coefficient dominant de P* le coefficient du terme dominant , qui est ici a_n ;
- *terme constant de P* le coefficient de degré 0, qui est ici a_0.

Définition 4 – Polynôme unitaire

Si P est un polynôme non nul, on dit que P est *unitaire* lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

✎ ***Exemple.*** $P(X) = 4X^5 - 2X + 3$ est de degré 5, de terme dominant $4X^5$, de coefficient dominant 4 et de terme constant 3. Il n'est pas unitaire.

✎ ***Exemple.*** Quel est la terme dominant de $(X+1)^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$?

Dans les résultats suivants on suppose que P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 5 – Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Si P et Q sont deux polynômes on a :

$$P \times Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Théorème 6 – Règles de calcul du degré

1. Si λ est un scalaire non nul : $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
2. En général : $\deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
   et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $(X+1)^n$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 = X$ puis tels que $P^2 = XP + 1$.

⚠ Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P+Q) < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ lorsque les termes dominants s'annulent.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré du polynôme $(X+1)^n - X^n$.

On définit la *composition de deux polynômes.* Si P et Q sont deux polynômes, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Ce polynôme est aussi noté $P(Q(X))$.

✎ ***Exemple.*** $P\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{2k}$. Ne pas confondre avec $X^2 P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+2}$.

Proposition 7 – Degré d'une composée

Si Q est non nul et P est non constant : $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) \times \deg(P)$

On peut encore affaiblir l'hypothèse sur P : P peut être constant mais cette valeur ne doit pas être une racine de Q.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $\left(X^2+1\right)^n$.

1.5 Parité d'un polynôme

Dans cette section, P est un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 8 – Polynôme pair/impair

1. On dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$.
2. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$.

Théorème 9 – Caractérisation de polynômes pairs/impairs

1. P est pair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
2. P est impair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

✎ ***Exemple.*** $X^5 + X$ est impair et $X^8 + 4X^4 + 3X^2$ est pair. Par contre, $X^3 + X^2$ n'est ni pair, ni impair.

1.6 Fonction polynomiales

Dans cette section, P et Q sont deux élément quelconques de $\mathbb{K}[X]$.

Le polynôme P est noté $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et Q est noté $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

Définition 10 – Fonction polynomiale associée à P

On appelle *fonction polynomiale* associée à P l'application $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Théorème 11 – Injection entre polynômes et fonctions polynomiales

L'application $P \longmapsto \widetilde{P}$ est une injection.

Par conséquent on notera encore P à la place de $\widetilde{P}$. Si $x \in \mathbb{K}$ le scalaire $\widetilde{P}(x)$, encore noté $P(x)$, est appelé P *évalué en* x.

⚠ Ne pas confondre le scalaire $P(x)$ et le polynôme $P(X)$.

L'unicité des coefficients, combinée à l'injection précédente, a pour conséquence le résultat suivant :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \Longleftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{K},\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = b_k\right)}$$

⚠ Ne pas oublier le quantificateur $\forall$ pour le scalaire x.

Une autre conséquence du théorème est que les ensembles $\mathbb{K}_0[X]$ et $\mathbb{K}$ sont en bijection. Par abus de notation on considère souvent que $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$, ie que $a1_{\mathbb{K}[X]} = a$.

On peut aussi remarquer que $P(0_{\mathbb{K}}) = a_0$: le *terme constant* de P est obtenu en évaluant P en $0_{\mathbb{K}}$.

On a donc : P est constant $\Longleftrightarrow P = P(0_{\mathbb{K}})$

2 Racines d'un polynôme

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Dans toute cette section A, B et C sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 12 – Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Si $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on dit que B *divise* A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$. Dans ce cas on le note $B \mid A$.

On dit que B est un *diviseur* de A, que A est *divisible* par B ou que A est un *multiple* de B.

On peut remarquer que tout polynôme non nul divise $0_{\mathbb{K}[X]}$.

✎ ***Exemple.*** $X-1$ divise X^n-1, pour tout entier naturel n non nul.

Proposition 13 – Propriétés de la relation de divisibilité

1. Transitivité. Si $C \mid B$ et $B \mid A$ alors $C \mid A$.
2. Réflexivité. On a $B \mid B$.
3. Antisymétrie. Si $B \mid C$ et $C \mid B$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda.C$.
4. Si $B \mid C$ et $C \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors $\deg(B) \leq \deg(C)$

Lorsque $B \mid C$ et $C \mid B$, on dit que les polynômes B et C sont *associés*.

Un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ quelconque est divisible par tout polynôme constant non nul et par tout polynôme qui lui est associé.

Théorème 14 – Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Si $B \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Q est appelé *quotient* et R est appelé *reste* de la division euclidienne de A par B.

✎ ***Exemple.*** Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $X^2 - X + 1$, et de $X^5 - X^4 - 2X^2 - 3X + 1$ par $X^2 + 2$.

Proposition 15 – Division euclidienne et divisibilité

B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Proposition 16 – Division par $X - a$

Si P est un polynôme et α un scalaire, alors le reste de la division euclidinne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.

Il existe donc un unique polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X - \alpha).Q(X) + P(\alpha)$$

2.2 Racines d'un polynôme

Dans cette section P est un polynôme et α un scalaire.

Définition 17 – Racine d'un polynôme

On dit que α est racine de P lorsque $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.

✎ ***Exemple.*** Le polynôme nul admet une infinité de racines : tous les scalaires. Les polynômes constants non nuls n'ont pas de racine.

✎ ***Exemple.*** Le polynôme $X-\alpha$ a une unique racine qui est α.

Rédaction.
Ne pas écrire $X-\alpha=0 \iff X=\alpha$ *puisque cette dernière égalité signifie l'égalité de suites* $(0,1,0,0,\dots)=(0,\alpha,0,0,\dots)$ *qui est évidemment fausse.*
Il faut écrire : pour $x\in\mathbb{K}$, $x-\alpha=0 \iff x=\alpha$, *donc* α *est l'unique racine de* $X-\alpha$.

✎ ***Exemple.*** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Les racines du polynôme X^n-1 sont les racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 18 – Racine et divisibilité

α est racine de P si, et seulement si, $X-\alpha$ divise P.

Autrement dit : $P(\alpha)=0 \iff \exists Q\in\mathbb{K}[X];\ P(X)=(X-\alpha)\times Q(X)$.

On peut noter que si P est non constant alors $\deg(Q)=\deg(P)-1$.

Théorème 19 – Cas de racines deux à deux distinctes

Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont des scalaires deux à deux distincts, alors :

$$\alpha_1,\dots,\alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)\mid P$$

Corollaire 20 – Relation entre degré et nombre de racines

Tout polynôme P non nul a un nombre de racines dans $\mathbb{K}$ au plus égal à son degré.

Par contraposée, s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\deg(P)\leq n$ et P a au moins $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

✎ ***Exemple.*** Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que P et Q coïncident en $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. Alors $P=Q$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction exponentielle complexe n'est pas polynomiale.

2.3 Ordre de multiplicité d'une racine

Dans cette section P est un polynôme et α un scalaire.

Définition 21 – Racine multiple

L'ordre de multiplicité de α pour P est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^k \mid P$, ie l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^k \mid P$ et $(X-\alpha)^{k+1} \nmid P$.
On dit alors que α est *racine d'ordre* k de P.

⚠ Remarquez que α racine d'ordre 0 signifie en fait que α n'est pas racine de P.

On utilise le vocabulaire suivant :

- si $k=1$, on dit que α est *racine simple* de P ;
- si $k=2$, on dit que α est *racine douple* de P ;
- si $k \geq 3$, on dit que α est *racine multiple* de P.

Théorème 22 – Ordre de multiplicité et divisibilité

α est racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de P si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^k \times Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

✎ ***Exemple.*** Pour $X(X-2)^3$, 0 est racine simple et 2 est racine d'ordre 3. -1 est racine d'ordre 0 (ie n'est pas racine).

Définition 23 – Polynôme scindé

P est dit scindé s'il est non constant et s'il s'écrit comme un produit de polynômes du premier degré :

$$P = \lambda \times \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des scalaires.

Dans ce cas λ est le *coefficient dominant* de P, n est son *degré* et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les *racines* de P.

⚠ Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut être scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$: par exemple X^2+1.

⚠ Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas supposé deux à deux distincts.
Si dans la liste $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on regroupe les valeurs identiques, alors on a l'écriture :

$$P = \lambda \times \prod_{k=1}^{r} (X-\mu_k)^{\nu_k}$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont les racines *distinctes* de P et $\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont leurs ordres de multiplicité.

Pour un polynôme scindé, le dégré est supérieur ou égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines. C'est en fait vrai même si le polynôme n'est pas scindé, d'après le théorème suivant.

Proposition 24 – Factorisation d'un polynôme

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de racines dans $\mathbb{K}$ distinctes $\mu_1, \ldots, \mu_r$ d'ordres de multiplicité $\nu_1, \ldots, \nu_r$. Il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = Q(X) \times \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)^{\nu_k} \qquad \text{et} \quad Q \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{K}$$

   Donc le degré de P est supérieur ou égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines.

2. Un polynôme P non nul est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, son degré est égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines dans $\mathbb{K}$.

Important. Très souvent, on compte les racines *avec leur ordre de multiplicité* : cela signifie qu'une racine est comptée autant de fois que son ordre de multiplicité. On ne parle donc plus de racines distinctes.

On obtient donc pour un polynôme P non nul :
• le degré de P est supérieur ou égal au *nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*
• P est scindé si, et seulement si, son degré est égal au *nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.

2.4 Décompositions en facteurs irréductibles

Définition 25 – Polynôme irréductible

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* lorsqu'il est non constant, et lorsque ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls, et les polynômes qui lui sont associés.

Autrement dit un polynôme P non constant est irréductible si, set seulement si :

$$\forall (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad \Big(P = QR\Big) \Longrightarrow \Big(Q \text{ est constant non nul ou } R \text{ est constant non nul}\Big)$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

⚠ L'irréductibilité dépend du choix de $\mathbb{K}$: $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$; $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 26 – Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarquer que ce résultat s'applique aux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: ils ont toujours au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Ce résultat est très puissant : l'introduction des nombres complexes a donné une racine au polynôme X^2+1, et du même coup à tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$!

Les conséquences sont nombreuses.

Corollaire 27 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Corollaire 28 – Décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant* s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.

Les nombres complexes α_1, $\dots$, α_n sont les racines complexes de P et ne sont pas nécessairement deux à deux disctintes (chaque racine est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité).

Un autre énoncé possible est le suivant : tous les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ sont *scindés*.

Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il suffit donc de déterminer ses racines.

Corollaire 29 – Nombre de racines des polynômes de $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, égal à son degré.

C'est faux pour le polynôme nul qui a lui une infinité de racines.

Exemple. Factoriser $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

En remarquant que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose dans $\mathbb{C}[X]$ on peut établir les résultats suivants.

Lemme 30 – Racines complexes et polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \Longleftrightarrow \overline{\alpha} \text{ est racine de } P$$

Pour un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ les racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées ; elles sont donc en nombre pair.

Le calcul suivant sera fondamental dans la suite. Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(X-\alpha) \times (X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Corollaire 31 – Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ degré 2 à discriminant strictement négatifs, sont ceux qui n'ont pas de racine réelle.

⚠ Le fait de ne pas avoir de racine réelle ne garantie pas d'être irréductible : X^4+1 n'a pas de racine réelle mais est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 32 – Décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{\ell}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\nu_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_\ell,\gamma_1,\dots,\gamma_\ell) \in \mathbb{R}^{k+2\ell}$ et $(r_1,\dots,r_k,\nu_1,\dots,\nu_\ell) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^{k+\ell}$, avec $\forall j \in [\![1,\ell]\!]$, $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.

Dans cet écriture, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les racines *réelles* de P et ne sont pas nécessairement deux à deux disctintes (chaque racine est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité).

Important. Pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit donc en théorie de déterminer ses racines *complexes*, puis de regrouper les racines conjuguées deux à deux.

✎ ***Exemple.*** Décomposer X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 33 – Nombre de racines des polynômes de $\mathbb{R}[X]$

1. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non nul a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, inférieur ou égal à son degré.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On a équivalence des prédicats :
   (i) P a un nombre de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, égal à son degré
   (ii) P n'a pas de racine complexe non réelle
   (iii) P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$

Corollaire 34 – Cas des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.

2.5 Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

Dans cette section, P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ noté :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

avec $a_n \neq 0$.

On suppose P *scindé*; il a donc n racines comptées avec leur ordre de multiplicité qu'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Théorème 35 – Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

On a les formules :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dans le cas d'un trinôme du second degré, on retrouve le théorème de Viète.

Ces formules permettent de calculer des sommes et des produits. Elles ont permis à l'Euler de deviner que :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

On peut remarquer que chaque coefficient de P donne une formule faisant intervenir les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Mais à part les deux ci-dessus, elles ne sont pas au programme de PCSI.

3 Dérivée d'un polynôme et applications

3.1 Dérivée d'un polynôme

Dans cette section P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 36 – Dérivée d'un polynôme

On définit le *polynôme dérivé* de P, noté P' par :

- si P est constant alors on pose $P' = 0$;
- si $\deg(P) \geq 1$ alors on le note $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

  On pose alors $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.

✎ ***Exemple.*** $P(X) = 4X^5 + 9X + \dfrac{3}{2}$ donne $P'(X) = 20X^4 + 9$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si on identifie polynôme et fonction polynomiale, alors on retrouve la dérivée en tant que fonction numérique.

Proposition 37 – Degré du polynôme dérivé

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, ie si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, ie si $\deg(P) \leq 0$, alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

On a donc :

$$P \text{ est un polynôme constant} \quad \Longleftrightarrow \quad P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Théorème 38 – Propriétés de la dérivation

Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda.P + Q) = \lambda.P' + Q' \quad \text{et} \quad (P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$$

et :

$$(Q \circ P)' = P' \times Q' \circ P$$

✎ ***Exemple.*** $\left(X^2 \times P(X)\right)' = 2X \times P(X) + X^2 \times P'(X)$ et $\left(P(2X)\right)' = 2 \times P'(2X)$.

Définition 39 – Dérivée d'ordres supérieurs

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le *polynôme dérivé d'ordre k* de P, note $P^{(k)}$, par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois.

✎ ***Exemple.*** $P(X) = 4X^5 + 9X + \frac{3}{2}$, $P'(X) = 20X^4 + 9$, $P''(X) = 80X^3$, $P^{(3)}(X) = 240X^2$, $P^{(4)}(X) = 480X$, $P^{(5)}(X) = 480$ et pour $k \geq 6$, $P^{(k)}(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 40 – Degré du polynôme $P^{(k)}$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.
2. Si $k \leq \deg(P)$, on a $\deg\left(P^{(k)}\right) = \deg(P) - k$

Si $k \leq \deg(P)$ et si $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(X) &= \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\times\cdots\times(j-k+1)\times a_j X^{j-k} = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} X^j \end{aligned}$$

et on en déduit que $\boxed{a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}}$

✎ ***Exemple.*** La dérivée de k-ième de X^j est 0 si $k > j$, et si $k \leq j$ elle vaut $j \times (j-1) \times \cdots \times (j-k+1) \times X^{j-k} = \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k}$.

3.2 Formule de Taylor

Théorème 41 – Formule de Taylor

Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors :

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

✎ ***Exemple.*** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P''(1) = -1$.

L'unicité des coefficients permet donc de dire à nouveau que $\boxed{a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}}$

On arrive au résultat principal de ce paragraphe, qui permet de déterminer simplement l'ordre de multiplicité d'une racine.

Lemme 42 – Dérivé et ordre de multiplicité

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \Longrightarrow \alpha \text{ est racine d'ordre } r-1 \text{ de } P'$$

Théorème 43 – Calcul de l'ordre de multiplicité

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a équivalence de :

(i) α est racine d'ordre r de P ;

(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Lorsqu'on factorise un polynôme, on peut donc simplifier la recherche de racines en déterminant les ordres de multiplicité avec ce théorème.

✎ ***Exemple.*** Factoriser le polynôme $P(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$.
Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$ et de plus $P_n^{(n)}(1) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(-1) \neq 0$.

Corollaire 44 – Caractérisation des polynômes scindés à racines simples

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On a équivalence des prédicats :

(i) P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples

(ii) P a un nombre de racines distinctes supérieur ou égal à son degré

(iii) P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et n'a pas de racine commune avec P'.

✎ ***Exemple.*** Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $P = X^n - X + 1$. Montrer que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$.