My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

1. Fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

1.1 Fonctions partielles

Une fonction *f*, de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, est de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est un point intérieur de D, les fonctions

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant a_i sont les fonctions partielles associées à *f* au point a.

Une fonction partielle est une restriction à une droite parallèle à un axe.

Pour que *f* soit continue en a, il est nécessaire que les fonctions partielles soient continues en a_i. Mais ce n'est pas suffisant.

Plus généralement, pour montrer que *f* n'est pas continue en a, il suffit de montrer que la restriction de *f* à une courbe continue passant par a n'est pas continue.

Attention, même si la restriction de *f* à toute droite passant par a est continue, cela ne prouve rien.

1.2 Fonctions coordonnées

On a $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$. Les fonctions, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto f_j(x)$ sont les fonctions coordonnées de *f*.

f est continue en a si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées sont continues en a.

1.3 Représentations graphiques (cas $p = 1$)

Si $n = 2$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{\big(x, y, f(x,y)\big) \ ; \ (x,y) \in D\}$$

est la surface représentative de *f*.

C'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction à une variable.

Si $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in D \ ; \ f(x_1,\dots,x_n) = k\}$$

est la ligne de niveau k de la fonction f.

Si $n = 2$, c'est une courbe plane ; si $n = 3$, c'est une surface.

Si (x_1,x_2) représente un point sur une carte et si $f(x_1,x_2)$ désigne son altitude, les lignes de niveau sont les courbes de même altitude qu'on trouve sur les cartes d'état-major.

2. Dérivées partielles (cas $p = 1$)

Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Dérivées partielles d'ordre 1

• **Définition**

Les dérivées partielles de f en $a = (a_1,\dots,a_n)$ sont les dérivées des fonctions partielles associées à f. On les note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{ou} \quad D_i f(a) \quad \text{ou} \quad f'_{x_i}(a).$$

• **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Si toutes les fonctions dérivées partielles :

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$$

sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, ou que f est continûment différentiable sur D.

Dans le cas général, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si ses p fonctions coordonnées f_j sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

- **Vecteur gradient**

Le gradient de f en a est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ \overrightarrow{e_i}\ .$$

Il est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par a.

2.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

- **Définition**

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en a, ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en a. On les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\,.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

- **Fonction de classe $\mathcal{C}^k$**

Si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.

Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$.

- **Théorème de Schwarz**

Si au moins une des deux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est continue en a, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\,.$$

Différentiabilité

1. Différentielle

1.1 Fonction différentiable (cas général) PSI

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en $a \in D$ s'il existe une application linéaire $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - l(h) \|}{\| h \|} = 0\,.$$

Dans ce cas, l'application l est unique. On l'appelle la différentielle de f au point a et on la note $\mathrm{d}f_a$.

1.2 Théorèmes (cas $p = 1$) PSI

Si f est différentiable en a, alors toutes les dérivées partielles premières de f en a existent.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, alors f est différentiable en a.

Les deux réciproques sont fausses.

> En PC et PT f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce qui suit.
> Et en MP et PSI, c'est aussi le cas dans la pratique.

1.3 Notation différentielle (cas $p = 1$)

Si $p = 1$, toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$h = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto l(h) = \sum_{i=1}^{n} A_i\, h_i\,.$$

Si f est différentiable en a, on a nécessairement $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

En notant $\mathrm{d}x_i$ la i-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$), la différentielle de f s'écrit :

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \mathrm{d}x_i\,.$$

1.4 Dérivée dans une direction (cas $p = 1$)

La dérivée de f en $a = (a_1, \dots, a_n)$ dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t\alpha_1, \dots, a_n + t\alpha_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \,.$$

Lorsque f est différentiable, cette limite existe et vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) \cdot \overrightarrow{u} \,.$$

Cette dérivée directionnelle est maximum dans la direction du gradient et vaut alors $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)\|$.

Si la dérivée directionnelle en a n'est pas égale au produit scalaire précédent, c'est une preuve que f n'est pas différentiable en a.

Sur les cartes d'état-major, le gradient indique la ligne plus grand pente. Il est orthogonal aux lignes de niveau.

1.5 Matrice jacobienne (cas général)

Soit $f : D \to \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ en $a \in D$. On appelle matrice jacobienne de f au point a la matrice de sa différentielle en a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

1.6 Jacobien

Si $n = p$, le déterminant de $J_f(a)$ est le jacobien de f au point a.

On le note $\dfrac{\mathrm{D}(f_1, \dots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \dots, x_n)}(a)$.

2. Composition

2.1 Différentielle d'une composée

Soit $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : D_2 \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur des ouverts tels que $f(D_1) \subset D_2$.

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a :

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a,$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) \times J_f(a).$$

Dans le cas $q = 1$ on a alors :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_k}\big(f(a)\big).$$

2.2 Difféomorphisme

- **Définition**

Soit $n = p$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $V = f(U)$. On dit que f est un difféomorphisme de U sur V si f est une bijection et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et V respectivement.

- **Théorème d'inversion locale**

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D.

Soit $a \in D$ tel que $\mathrm{d}f_a$ soit inversible, c'est-à-dire tel que le jacobien $\dfrac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_n)}(a)$ soit non nul.

Il existe un voisinage ouvert U de a tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Extremum d’une fonction à plusieurs variables

1. Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$.

f admet un maximum (resp. minimum) global (ou absolu) en $a \in D$ si

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a))$$

f admet un maximum (resp. minimum) local (ou relatif) en $a \in D$ s'il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V \qquad f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a))$$

2. Existence d'un minimum et d'un maximum globaux

Si D est compact (c'est-à-dire fermé et borné puisqu'on est en dimension finie) et si f est continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois.

3. Condition nécessaire d'extremum local

Si f présente un extremum local en a, et si f est différentiable en ce point, alors :

$$\forall i \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \overrightarrow{0}\ .$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point critique, ou point stationnaire, de f.

Les éventuels extremums sont donc à chercher parmi les points critiques et les points où f n'est pas différentiable (le plus souvent les points frontière de D).

En l'absence de théorème donnant une condition suffisante, étudiez le signe de la différence $f(x) - f(a)$ pour x voisin de a, ou, mieux, le signe de

$$\Delta(h_1,\ldots h_n) = f(a_1 + h_1,\ldots,a_n + h_n) - f(a_1,\ldots,a_n)$$

avec les h_i voisins de 0.

4. Condition suffisante d'extremum local (cas de 2 variables) PT

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point critique ; posons :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \;\; ; \;\; S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \;\; ; \;\; T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,.$$

On a alors :

- si $S^2 - RT < 0$, f présente un extremum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit d'un maximum si $R < 0$ et d'un minimum si $R > 0$;
- si $S^2 - RT > 0$, f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extremum ;

> Le mot *col* vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage.
>
> Le mot *selle* vient de l'exemple d'une selle de cheval.

- si $S^2 - RT = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.