My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

PRÉPAS ELBILIA

Prépas PSI

Résumé de Cours

Equations Différentielles

Généralités sur les équations différentielles

1. Équations différentielles

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle t et les valeurs $x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ d'une fonction inconnue et de certaines de ses dérivées, de la forme :

$$F\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction continue.

L'ordre n de l'équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans (E).

Si x est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) est dite scalaire.

Si x est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, l'équation (E) est dite vectorielle.

On appelle solution de (E) sur I, ou intégrale de (E) sur I, toute fonction définie sur un intervalle ouvert I possédant des dérivées jusqu'à l'ordre n et telle que :

$$\forall t \in I \qquad F\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0\,.$$

Résoudre (E) dans I, c'est rechercher l'ensemble de ses solutions dans I.

La courbe représentant une solution de (E) est aussi appelée courbe intégrale de (E).

Une solution x est dite maximale lorsqu'il n'existe pas de solution coïncidant avec x sur I et définie sur un intervalle strictement plus grand.

Le problème de Cauchy est la recherche des solutions d'une équation différentielle vérifiant des conditions initiales imposées.

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons une équation différentielle du premier ordre sous la forme :

$$x' = f(t, x) \qquad (E)$$

avec f définie et continue sur $I \times U$ où I est un intervalle ouvert et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur $I \times U$.

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale, et une seule, du problème de Cauchy associé.

Toute solution de (E) est une restriction de cette solution.

Équations différentielles linéaires

1. Équations différentielles scalaires linéaires

1.1 Définitions

- Dans le cas du premier ordre, elles sont de la forme :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que a ne s'annule pas sur J.

- Dans le cas du second ordre, elles sont de la forme :

$$a(t)x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b, c et f sont des fonctions données, continues sur un intervalle I.

Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que a ne s'annule pas sur J.

L'équation est dite à coefficients constants si elle est de la forme :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et c sont des constantes données, réelles ou complexes, avec $a \neq 0$.

1.2 Théorèmes dus à la linéarité

- Toute solution de **(1)** est de la forme $x_P(t) + x_S(t)$ où $x_P(t)$ est une solution particulière de **(1)** et $x_S(t)$ la solution générale de l'équation homogène associée :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

ou

$$a(t)x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

- Les solutions complexes de **(2)** sur J forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 pour le premier ordre, 2 pour le second ordre.

Si a, b et c sont à valeurs réelles, l'ensemble des solutions réelles de **(2)** sur J est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 pour le premier ordre, 2 pour le second ordre.

2. Résolution dans le cas du premier ordre

2.1 Résolution de l'équation homogène associée

Ses solutions sont du type :

$$x_S(t) = K\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{où} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{a(u)}\mathrm{d}u$$

avec K constante arbitraire et t_0 élément quelconque de I.

2.2 Recherche d'une solution particulière (méthode de Lagrange)

x_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\,x_1(t)$ soit solution de **(1)**.

Ceci conduit à $K'(t) = \dfrac{f(t)}{a(t)x_1(t)}$ ce qui permet de calculer $K(t)$ puis $x(t)$.

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

3. Résolution dans le cas du second ordre

3.1 Résolution de l'équation homogène dans le cas de coefficients constants

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de **(2)** si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0,$$

ce qui conduit à calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. On a alors :

$$x_S(t) = K_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + K_2\,\mathrm{e}^{r_2 t},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0. On a alors :

$$x_S(t) = (K_1\,t + K_2)\,\mathrm{e}^{r_0 t},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

- Si a et b sont réels et si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$. On a alors :

$$x_S(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t\right),$$

où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

En physique, on utilise la forme :

$$K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t = A \cos(\beta t - \varphi)$$

avec $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{K_1}{A}$ et $\sin \varphi = \dfrac{K_2}{A}\cdot$

3.2 Résolution de (1) à coefficients constants dans quelques cas

- Cas où $f(t)$ est un polynôme $P(t)$ de degré n

Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré

n si $c \neq 0$;

$n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$;

$n+2$ si $c = b = 0$ et $a \neq 0$.

La recherche de cette solution se fait par identification.

- Cas où $f(t) = \mathrm{e}^{kt}\, P(t)$ avec P polynôme et k constante

On effectue le changement de fonction inconnue

$$x(t) = \mathrm{e}^{kt}\, z(t)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue. En reportant x, x' et x'' dans **(1)**, on est conduit à une équation en z du type précédent.

- Cas où $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t\; P(t)$ ou $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t\; P(t)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,t}\, P(t)$.

2.3 Méthodes générales de résolution de l'équation complète (1)

- **Variation de la constante**

Si x_1 est une solution de **(2)**, ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\,x_1(t)$$

où u est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans **(1)**.

- **Système fondamental de solutions**

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de **(2)**, on peut chercher la solution de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\,x_1(t) + v(t)\,x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t)\,x_1(t) + v'(t)\,x_2(t) = 0\,.$$

Les fonctions u et v sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u'\,x_1 + v'\,x_2 = 0 \\ u'\,x_1' + v'\,x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de x_1 et x_2, ne s'annule pas sur I lorque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t)\,f(t)}{w(t)} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{x_1(t)\,f(t)}{w(t)}\cdot$$

- **Utilisation de séries entières**

On peut chercher des solutions sous la forme d'un développement en série entière.

Cette méthode peut être envisagée quand $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des polynômes simples. N'oubliez pas de vérifier que la (ou les) série entière obtenue a un rayon de convergence non nul.

Systèmes différentiels linéaires

1. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

1.1 Définitions et notations

Un système de p équations différentielles linéaires du premier ordre et à coefficients constants est de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}\,x_1(t) + \cdots + a_{1p}\,x_p(t) + b_1(t) \\ & \vdots \\ x_p'(t) &= a_{p1}\,x_1(t) + \cdots + a_{pp}\,x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

où les b_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose que le nombre d'inconnues est égal à celui des équations.

Avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$$

(S) s'écrit sous la forme matricielle :

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t).$$

Si $B(t) = 0$, le système est dit homogène.

1.2 Structure des solutions

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad (S')$$

est un espace vectoriel de dimension p.

Toute solution de (S) est la somme de la solution générale de (S') et d'une solution particulière de (S).

1.3 Cas où A est diagonalisable

Soit A diagonalisable ; notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ ses valeurs propres et $V_1,\ldots,V_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ de vecteurs propres associés.

L'espace vectoriel des solutions du système homogène (S') admet pour base :

$$\left(V_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ldots,V_p\,\mathrm{e}^{\lambda_p t}\right).$$

2. Résolution de (S)

2.1 Par réduction de A

On a $A = PRP^{-1}$ où R est diagonale ou triangulaire. Si l'on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, le système s'écrit :

$$Y'(t) = RY(t) + C(t)\,.$$

On résout ce système réduit et on en déduit $X(t) = PY(t)$.

Si $B(t) \neq 0$, cette méthode nécessite le calcul de P^{-1} et peut être pénible.

2.2 Par la méthode de « variation des constantes »

Si $\big(C_1(t),\ldots,C_p(t)\big)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (S'), on peut poser $X(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(t)\,C_i(t)$ où les u_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

2.3 Par la recherche d'intégrales premières indépendantes

Si λ est une valeur propre de A, comme $\det(A - \lambda I_p) = 0$, il existe une combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, des lignes L_i de la matrice $A - \lambda I_p$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,L_i = 0\,.$

En utilisant cette combinaison linéaire à partir des lignes de

$$X' - \lambda X = (A - \lambda I_p)X + B$$

on obtient une équation différentielle ordinaire qui donne $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,x_i\,.$

Si A est diagonalisable, on obtient ainsi p combinaisons linéaires en x_i, d'où l'on déduit les x_i.