My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Espaces préhilbertiens

1. Forme bilinéaire et forme quadratique

1.1 Définitions

- **Forme bilinéaire symétrique**

Une forme bilinéaire f sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable.

Ele est symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad f(x,y) = f(y,x)\,.$$

Une application q de E dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique f telle que :

$$\forall x \in E \qquad q(x) = f(x,x)\,.$$

q est la forme quadratique associée à f.

- **Forme polaire d'une forme quadratique**

Une forme quadratique q sur E est associée à une seule forme bilinéaire symétrique f donnée par :

$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}\big[q(x+y) - q(x) - q(y)\big]\,.$$

f est la forme polaire de q.

- **Forme positive**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme quadratique q, et sa forme polaire f, sont dites positives si :

$$\forall x \in E \qquad q(x) \geqslant 0\,.$$

- **Forme définie positive**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme bilinéaire symétrique f, et sa forme quadratique associée q, est dite définie positive si :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \qquad q(x) > 0\,.$$

1.2 Cas où E est de dimension finie

Soit E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- **Matrice d'une forme bilinéaire**

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j$, alors $f(x,y) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, f(e_i, e_j)$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$f(x,y) = {}^t X A Y = {}^t Y A X$$

f est symétrique si, et seulement si, la matrice A est symétrique.

- **Expression d'une forme quadratique**

$q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_1, \dots, x_n$ (combinaison linéaire d'expressions du type x_i^2 ou $x_i\, x_j$ avec $i \neq j$).

Réciproquement, tout polynôme homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ est une forme quadratique sur E.

2. Espaces préhilbertiens réels

2.1 Produit scalaire

- **Définitions**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire φ, symétrique, définie positive.

On dit que (E, φ) est un espace préhilbertien réel.

$\varphi(x,y)$ se note $< x \mid y >$ ou $(x \mid y)$ ou $x.y$.

- **Exemples**

Dans $\mathbb{R}^n$ $\quad < X \mid Y > = {}^t X Y = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

Dans $E = \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ $\quad < f \mid g > = \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad < A \mid B > = \mathrm{tr}\left({}^t A B\right)$

2.2 Norme euclidienne

E étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, en posant

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{< x \mid x >},$$

on définit une norme sur E.
On obtient aussi une distance en posant $d(x,y) = \|x - y\|$.

2.3 Relations entre produit scalaire et norme

- **Égalité de polarisation**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x \mid y >,$$

ce qui permet d'obtenir le produit scalaire $< x \mid y >$ en fonction des normes.

- **Identité du parallélogramme**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Cette égalité est la généralisation de la propriété géométrique : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \big| < x \mid y > \big| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.

Pour retenir ce théorème, pensez au cas particulier de deux vecteurs du plan et à

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|\cos(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}).$$

3. Espaces préhilbertiens complexes

3.1 Produit scalaire hermitien PC-PSI

- **Définitions**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire hermitien sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie la symétrie hermitienne, soit :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$$

est linéaire à droite, soit :

$$\forall (x,y_1,y_2) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \varphi(x,\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x,y_1) + \lambda_2 \varphi(x,y_2)$$

est donc semi-linéaire à gauche, soit :

$$\forall (x_1,x_2,y) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,y) = \overline{\lambda_1}\,\varphi(x_1,y) + \overline{\lambda_2}\,\varphi(x_2,y)$$

est définie positive, soit :

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x,x) \geqslant 0 \qquad ; \qquad \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0\,.$$

Remarquez que, grâce à la symétrie hermitienne, on a bien $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

On dit que (E,φ) est un espace préhilbertien complexe.

$\varphi(x,y)$ se note $< x \mid y >$ ou $(x \mid y)$.

• **Exemples**

Dans $\mathbb{C}^n$ $\quad < X \mid Y > = {}^t\overline{X}\,Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\,y_i\,.$

Dans $E = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ $\quad < f \mid g > = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\mathrm{d}t\,.$

3.2 Norme hermitienne

E étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien, on définit une norme sur E en posant :

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{< x \mid x >}\,,$$

On obtient aussi une distance en posant $d(x,y) = \|x - y\|$.

3.3 Relations entre produit scalaire et norme

$x \in E \quad \forall y \in E$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\ < x \mid y >\,,$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,.$$

$$4 < x \mid y > = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 + \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2$$

3.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

- **Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)**

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad \left| < x \mid y > \right| \leqslant \|x\| \|y\| \,.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.

- **Corollaire (inégalité triangulaire)**

$$\forall x \in \quad \forall y \in E \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés avec $< x|y > \in \mathbb{R}_+$.

Orthogonalité

Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Vecteurs orthogonaux

1.1 Définitions

Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $< x|y >= 0$; on note $x \perp y$.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires.

1.2 Propriété

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

1.3 Théorème de Pythagore

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale finie, on a :

$$\| \sum_{i \in I} x_i \|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 .$$

Attention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 ,$$

mais si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a seulement :

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

La réciproque est fausse car l'égalité entraîne seulement :

$$\mathrm{Re} < x|y >= 0 .$$

2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

2.1 Définitions

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

On dit que F et G sont orthogonaux, et on note $F \perp G$, quand :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \qquad < x|y >= 0\,.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans ne peuvent pas être orthogonaux.

L'orthogonal de F est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F^{\perp} = \{x \in E\ ;\ \forall y \in F \quad < x|y >= 0\}\,.$$

2.2 Propriétés

$$E^{\perp} = \{0\}\ ;\ \{0\}^{\perp} = E\ ;\ F \perp G \iff F \subset G^{\perp} \iff G \subset F^{\perp}$$

Attention, $F \perp G$ n'entraîne pas $G = F^{\perp}$.

$$F \subset G \Longrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}\ ;\ F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}\ ;\ F \cap F^{\perp} = \{0\}$$

Attention, en général $E \neq F \oplus F^{\perp}$ et $F \neq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

3. Supplémentaire orthogonal

3.1 Définition

Dans un espace préhilbertien E, deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires orthogonaux quand :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G\,.$$

3.2 Propriété

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, on a $F = G^{\perp}$, $G = F^{\perp}$, d'où $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

3.3 Projecteur orthogonal

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur orthogonal quand $p^2 = p$ et $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$.

$\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont alors supplémentaires orthogonaux.

4. Orthogonalité en dimension finie

4.1 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille libre de E ; il existe une famille libre orthogonale $(y_1,\ldots,y_n)$ telle que $\text{Vect}(x_1,\ldots,x_n) = \text{Vect}(y_1,\ldots,y_n)$.

Dans la méthode de Schmidt, elle se construit par récurrence en posant :

$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i\, y_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{< y_i|x_k >}{< y_i|y_i >}.$$

> Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, faites attention à l'ordre des produits scalaires dans λ_i.

4.2 Corollaire

Tout espace préhilbertien E de dimension finie n admet une base orthonormale.

4.3 Intérêt d'une base orthonormale

Soit E muni d'une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$.

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \quad \text{on a} \quad x_i = < e_i|x >.$$

> Attention à l'ordre du produit scalaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

X et Y étant les matrices colonnes des coordonnées de x et de y, on a :

$$< x|y > = {}^t\overline{X}Y \ ; \ \|x\| = \sqrt{{}^t\overline{X}X} \ ; \ d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

4.4 Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E de dimension finie n ; alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

5. Cas d'un sous-espace F de dimension finie dans un espace E de dimension infinie

5.1 Théorème

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

On peut donc définir le projecteur orthogonal p_F sur F.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i | x > e_i \, .$$

5.2 Définition

On appelle distance d'un élément x de E au sous-espace de dimension finie F le nombre :

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| \, .$$

5.3 Théorème

$d(x, F)$ est un minimum atteint en un point, et un seul, $z = p_F(x)$, et l'on a :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2 \, .$$

Attention, il est important que F soit de dimension finie.

5.4 Inégalité de Bessel

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E \qquad \sum_{j=1}^{p} \left| < e_j | x > \right|^2 \leqslant \|x\|^2 \, .$$

Espaces vectoriels euclidiens

1. Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Un espace vectoriel euclidien E est un espace préhilbertien réel de dimension finie n.

1.2 Propriétés

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et, dans une telle base, pour tout $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} < e_i | x > e_i \quad ; \quad < x | y > = {}^t XY \quad ; \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

On peut définir le projecteur orthogonal p_F sur F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

2. Isomorphisme avec le dual

Toute forme linéaire f sur un espace euclidien E s'écrit de façon unique sous la forme $f(x) = < a | x >$ où a est un vecteur de E.

On a donc $\quad H = \left(\mathbb{R}a\right)^{\perp}$. H est un hyperplan si $f \neq 0$, soit $a \neq 0$.

3. Orientation

3.1 Orientation de E

Une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ étant choisie, on dit que $\mathcal{B}$ est une base directe si $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} > 0$ et indirecte si $\det_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} < 0$.

3.2 Orientation d'un hyperplan

Un hyperplan est orienté par le choix d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Une base $\mathcal{B}$ de H est dite directe si, et seulement si, $\left(\mathcal{B}, \overrightarrow{n}\right)$ est une base directe de E.

Endomorphismes orthogonaux

1. Définitions et caractérisations

1.1 Définition

Dans un espace vectoriel euclidien E, un endomorphisme f est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire, soit

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad < f(x) | f(y) > = < x | y > \qquad \textbf{(1)}.$$

On dit aussi que f est une isométrie vectorielle.

En fait, la condition **(1)** entraîne $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.2 Conditions équivalentes

$f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si, et seulement si, il vérifie l'une des conditions suivantes :

(2) f conserve la norme, soit

$$\forall x \in E \qquad \| f(x) \| = \| x \| \ ;$$

(3) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale ;

(4) pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormale.

1.3 Corollaire

Un endomorphisme orthogonal f appartient à $\mathrm{GL}(E)$. Il est appelé automorphisme orthogonal de E.

Ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1.

1.4 Exemples

Les symétries orthogonales et les réflexions sont des automorphismes orthogonaux.

Mais une projection orthogonale distincte de l'identité n'en est pas un ; si $x \in \operatorname{Ker} p$ avec $x \neq 0$, on a $\| p(x) \| < \| x \|$.

1.5 Groupe orthogonal

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est noté $\mathrm{O}(E)$ et appelé groupe orthogonal de E. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

2. Matrices orthogonales

2.1 Définition

Une matrice carrée A est dite orthogonale si c'est la matrice de passage d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ à une base orthonormale $\mathcal{B}'$.

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est le groupe orthogonal d'ordre n ; il est noté $\mathrm{O}(n)$.

2.2 Conditions équivalentes

Une matrice carrée est orthogonale si, et seulement si, ses vecteurs colonnes vérifient :

$$\forall i \quad \forall j \qquad < C_i | C_j >= \delta_{ij} .$$

Une matrice carrée d'ordre n est orthogonale si, et seulement si :

$${}^t A\, A = I_n \iff {}^t A = A^{-1} .$$

2.3 Lien avec les endomorphismes

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien E et A la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{B}$. On a :

$$A \in \mathrm{O}(n) \iff f \in \mathrm{O}(E) .$$

Le groupe $\mathrm{O}(n)$ pour le produit de matrices est isomorphe au groupe $\mathrm{O}(E)$ pour la composition des applications.

2.4 Déterminant d'une matrice orthogonale

Si A est une matrice orthogonale, on a $\det A = \pm 1$.

Attention, la condition est nécessaire mais non suffisante.

2.5 Groupe spécial orthogonal

On appelle groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$, ou groupe des rotations de E, le sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ formé des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1.

De même pour les matrices : $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \; ; \det A = 1\}$.

3. Cas de la dimension 2

3.1 Rotations

La rotation d'angle θ appartient à $\mathrm{SO}(E)$.

Dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale directe, sa matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a $\det A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 2\cos\theta$.

3.2 Réflexions

La matrice de la réflexion d'axe Δ dans une base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

mais elle dépend de $\mathcal{B}$. Dans une base adaptée, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δ est l'ensemble des vecteurs invariants. On a $\det B = -1$ et $\operatorname{tr} B = 0$.

4. Cas de la dimension 3

Le classement se fait suivant la dimension de $V = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, espace vectoriel des vecteurs invariants par f.

4.1 Cas $\dim V = 3$

On a alors $f = \mathrm{Id}_E$.

4.2 Cas $\dim V = 2$

f est alors la réflexion par rapport à V. Dans une base adaptée, sa matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 Cas $\dim V = 1$

f est alors une rotation d'axe V. Si on oriente l'axe et si on note son angle θ, sa matrice dans une base adaptée *directe*, est :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étude pratique d'une rotation

Si r est la rotation d'axe dirigé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ et d'angle θ, on a :

$$r(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{n} + \cos\theta[\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{n}] + \sin\theta\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}\,.$$

Réciproquement, soit f un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est une droite de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{n}$.
C'est une rotation dont l'angle θ vérifie $\quad \mathrm{tr}A = 1 + 2\cos\theta$.

65 Endomorphismes symétriques

PSI

2e année

1. Adjoint d'un endomorphisme

1.1 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; l'adjoint de f est l'unique élément $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad < f(x)|y >=< x|f^*(y) >$$

1.2 Propriétés

- L'application $\varphi : f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que l'on a toujours :

$$(f+g)^* = f^* + g^* \quad ; \quad \left(\lambda f\right)^* = \lambda f^* \quad ; \quad \left(f^*\right)^* = f$$

- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, on a :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}} f \implies {}^tA = \text{mat}_{\mathcal{B}} f^*.$$

Il en résulte $\left(f \circ g\right)^* = g^* \circ f^*$.

Si f est inversible, alors f^* est inversible et $\left(f^*\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$.

- Endomorphismes orthogonaux

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff f^* = f^{-1}$$

- Noyaux et images

$$\text{Ker} f^* = \left(\text{Im} f\right)^\perp \quad ; \quad \text{Im} f^* = \left(\text{Ker} f\right)^\perp \quad ; \quad \text{rg}(f^*) = \text{rg} f$$

$$f(F) \subset F \iff f^*(F^\perp) \subset F^\perp$$

2. Endomorphismes symétriques

2.1 Définition

$f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, ou autoadjoint, si $f = f^*$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad < f(x)|y >=< x|f(y) >$$

Attention à ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

2.2 Propriétés

- Si A est la matrice de f dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, on a

$$f \text{ symétrique} \iff {}^tA = A\,.$$

- $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, mais pas une sous-algèbre car, si A et B sont symétriques, AB est symétrique si, et seulement si, $AB = BA$.
- p projecteur orthogonal $\iff p^2 = p$ et $p^* = p$.
- s symétrie orthogonale $\iff s = s^{-1} = s^*$.

2.3 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de E.

- Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- f est diagonalisable dans une base orthonormale.
- E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f.
- Corollaire

Si A est une matrice carrée symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP\,.$$

Le calcul de P^{-1} est immédiat puisque $P^{-1} = {}^tP$.

2.4 Forme quadratique et valeurs propres

Soit A une matrice symétrique réelle et q la forme quadratique associée.

q est positive $\iff$ les valeurs propres de A sont $\geqslant 0$;

q est définie positive $\iff$ les valeurs propres de A sont > 0.