PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Prépas PSI

# Résumé de Cours (EVN)

## 1. Normes et distances

### 1.1 Normes

- **Définition**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur $E$ est une application $N$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$(1)\ \forall x \in E \qquad N(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0\ ;$$

$$(2)\ \forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)\ ;$$

$$(3)\ \forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)\,.$$

Le couple $(E,N)$ est appelé espace vectoriel normé. On écrit souvent $N(x) = \|x\|$.

- **Exemples**

**a)** $E = K^n$ ; pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in E$, on définit :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ N_2(x) &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ N_\infty(x) &= \sup\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \end{aligned}$$

**b)** $E = \mathcal{C}([a,b],K)$ étant l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $K$, pour $f \in E$ on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \ ;\ N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\,.$$

$N_1$ est la norme de la convergence en moyenne, $N_2$ la norme de la convergence en moyenne quadratique.

**c)** $E = \mathcal{B}(A,F)$ étant l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble $A$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

où $\|\ \|$ désigne la norme dans $F$.

$N_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

**d)** $E$ étant muni d'un produit scalaire, $N(x) = \sqrt{(x|x)}$ définit une norme appelée norme euclidienne si $K = \mathbb{R}$ et hermitienne si $K = \mathbb{C}$. Les normes $N_2$ des exemples **a)** et **b)** sont des normes euclidiennes ou hermitiennes.

**e)** Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, on définit une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_p$ en posant :

$$N(u_1,\dots,u_p) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant p} N_i(u_i).$$

## 1.2 Distance associée à une norme

• La distance entre deux éléments $x$ et $y$ de $E$ est :

$$d\,(x,y) = \|y - x\|.$$

• **Propriétés**

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) \geqslant 0$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) = 0 \iff x = y$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \qquad d\,(x,y) = d\,(y,x)$

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \qquad d\,(x,z) \leqslant d\,(x,y) + d\,(y,z)$

• La distance entre deux parties $A$ et $B$ non vides de $E$ est :

$$d\,(A,B) = \inf\{d\,(x,y)\ ;\ x \in A\,, y \in B\}.$$

• Le diamètre d'une partie non vide $A$ est :

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d\,(x,y)\ ;\ x \in A\,, y \in A\}.$$

Si diam $A$ est fini, $A$ est dite bornée.

Une application $f$ définie sur un ensemble $D$ et à valeurs dans $E$ est dite bornée si $f(D)$ est une partie bornée de $E$.

## 1.3 Boules

La boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est :

$$B(a,r) = \{x \in E\ ;\ \|x - a\| < r\}.$$

La boule fermée de centre $a$ et de rayon $r > 0$ est :

$$B^*(a,r) = \{x \in E\ ;\ \|x - a\| \leqslant r\}.$$

# 2. Suites d'éléments

## 2.1 Convergence

La définition est analogue au cas des suites dans $\mathbb{R}$.

La suite $(u_n)$ est convergente vers $l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon\,.$$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Beaucoup de théorèmes sur les suites numériques se généralisent : unicité de la limite, opérations algébriques, théorème de Bolzano-Weierstrass…

Ne généralisez pas les notions qui utilisent la relation $\leqslant$ comme : limites infinies, suites monotones, théorème d'encadrement.

## 2.2 Normes équivalentes

Soit $N$ et $N'$ deux normes sur $E$. On dit qu'elles sont équivalentes si toute suite qui converge vers $l$ pour une norme, converge aussi vers $l$ pour l'autre norme.

Pour ceci, il faut, et il suffit, qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E \qquad \alpha\, N'(x) \leqslant N(x) \leqslant \beta\, N'(x)\,.$$

Pour montrer que $N$ et $N'$ sont équivalentes, montrez que les fonctions $\dfrac{N'}{N}$ et $\dfrac{N}{N'}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Pour montrer qu'elles ne sont pas équivalentes, montrez que l'un de ces quotients n'est pas borné.

## 2.3 Cas d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

# 3. Topologie d'un espace vectoriel normé $(E, N)$

## 3.1 Voisinages d'un point

Une partie $V$ est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en $a$ et incluse dans $V$.

### 3.2 Ouverts de $E$

Une partie $A$ de $E$ est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \qquad \exists r_a > 0 \qquad B(a,r_a) \subset A.$$

Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

Un point $a$ est un point intérieur de $A$ si $A$ est un voisinage de $a$.

L'ensemble des points intérieurs de $A$ est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de $A$. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Une partie $A$ est ouverte si, et seulement si, $A = \overset{\circ}{A}$.

### 3.3 Fermés de $E$

Une partie $A$ est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

$a$ est un point adhérent à $A$ si toute boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ contient un point de $A$. L'ensemble des points adhérents à $A$ est l'adhérence $\overline{A}$ de $A$. On a $A \subset \overline{A}$.

Si $\overline{A} = E$, on dit que $A$ est dense dans $E$.

Une partie $A$ est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

Une partie $A$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de $A$ qui converge dans $E$, la limite appartient à $A$.

Fournir une suite d'éléments de $A$ qui converge dans $E$ vers une limite qui n'appartient pas à $A$, c'est donc démontrer que $A$ n'est pas fermée.

### 3.4 Frontière

La frontière d'une partie $A$ est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

C'est l'ensemble des points $a$ tels que toute boule $B(a,r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de $A$ et un vecteur qui n'appartient pas à $A$.

### 3.5 Point isolé

Un point $a$ de $A$ est isolé si l'on peut trouver une boule de centre $a$ ne contenant pas d'autre point de $A$ autre que $a$.

# Continuité

## 1. Fonctions continues

### 1.1 Limite

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $f$ une application de $D \subset E$ dans $F$, $a$ un point adhérent à $D$ et $l \in F$.

$f$ admet la limite $l$ au point $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \eta > 0 \qquad \forall x \in D \qquad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon\,.$$

> Les normes dans $E$ et dans $F$ sont notées de la même façon pour ne pas alourdir les notations.

### 1.2 Continuité

$f$ est continue en $a$ si elle est définie en $a$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f$ est continue sur $D \subset E$ si elle est continue en tout point de $D$.

Les opérations algébriques sont analogues au cas particulier des fonctions numériques continues.

Deux fonctions continues de $D$ dans $F$ qui coïncident sur une partie dense de $D$ sont égales.

### 1.3 Caractérisations de la continuité

- **Caractérisation séquentielle**

Pour que $f$ soit continue en $a$, il faut, et il suffit, que, pour toute suite $(u_n)$ qui converge vers $a$, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

- **Caractérisation topologique**

$f$ est continue sur $D$ si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de $F$ est un ouvert (resp. fermé) de $E$.

> Attention, si $f$ est continue et si $D$ est un ouvert (resp. fermé) de $E$, on ne peut rien dire de l'image directe $f(D)$.

### 1.4 Homéomorphisme

$f$ est un homéomorphisme si elle est bijective et si $f$ et $f^{-1}$ sont toutes les deux continues.

### 1.5 Fonctions lipschitziennes

Une fonction $f$ de $D$ dans $F$ est lipschitzienne de rapport $k \geqslant 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\|$$

Si $0 < k < 1$, on dit que $f$ est contractante.

## 2. Applications linéaires continues

### 2.1 Cas d'un espace de dimension finie

Si $E$ est de dimension finie, toute application linéaire de $E$ dans $F$ est continue.

Si $E, F, G$ sont de dimensions finies, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans $G$ est continue.

### 2.2 Cas général PSI

- **Critère de continuité**

Si $f$ est linéaire de $E$ dans $F$, les propositions suivantes sont équivalentes :

– $f$ est continue sur $E$ ;

– $f$ est continue en 0 ;

– $f$ est uniformément continue ;

– $\exists k \geqslant 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant k\,\|x\|$.

> Vérifiez bien que $f$ est linéaire avant d'appliquer ce critère de continuité.

• **Espace des fonctions linéaires continues**

L'ensemble des fonctions linéaires et continues de $E$ dans $F$ est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}_c(E,F)$.

### 2.3 Norme subordonnée PSI

• **Norme d'une application linéaire continue**

En posant :

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

on définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, dite norme subordonnée aux normes choisies dans $E$ et dans $F$.

• **Norme d'une composée**

Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et :

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \, \|f\|.$$

Cette propriété, vraie pour une norme subordonnée, n'est pas vérifiée pour une norme quelconque.

## 3. Compacité

### 3.1 Cas d'un espace de dimension finie

Dans un espace normé de dimension finie, un compact est une partie fermée et bornée.

### 3.2 Fonction continue sur un compact

Soit $f$ une fonction continue de $E$ dans $F$ et $A$ un compact de $E$.

• $f(A)$ est un compact de $F$.

• $f$ est uniformément continue sur $A$ (théorème de Heine).