My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

PSI

Résumé de Cours
Séries entières

1. Convergence d'une série entière

1.1 Série entière

Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \qquad \text{avec} \qquad u_n(z) = a_n\, z^n$$

où z est la variable réelle ou complexe et les a_n des constantes réelles ou complexes.

1.2 Lemme d'Abel

Si la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)$ est bornée, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < r$.

1.3 Rayon de convergence

Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ est une série entière, elle vérifie une, et une seule, des trois propriétés :

- la série converge uniquement pour $z = 0$;
- il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la série converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, et diverge pour tout z tel que $|z| > R$;
- La série converge absolument pour tout z.

Le nombre R du deuxième cas est appelé rayon de convergence de la série entière.

Dans le premier cas, le rayon de convergence est nul.

Dans le troisième cas, on dit que le rayon de convergence est infini.

1.4 Détermination du rayon de convergence

- Le nombre R est la borne supérieure des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \;;\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n \;\text{ converge}\} \;;\; \{r \in \mathbb{R}_+ \;;\; |a_n|\, r^n \;\text{ borné}\}$$

• On détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = l\ |z|^k$, en écrivant :

$$l\ |z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$$

on obtient $R = \sqrt[k]{\dfrac{1}{l}}$.

> Cette méthode suppose l'existence d'une limite, ce qui n'est pas toujours le cas.

1.5 Mode de convergence

• La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ de rayon de convergence R converge absolument dans l'intervalle (ouvert) de convergence $]-R,R[$ dans le cas réel ; dans le disque (ouvert) de convergence $B(0,R)$ dans le cas complexe.

Pour $|z| > R$, la série diverge.

Si $|z| = R$, il n'y a pas de résultat général.

• La convergence est normale, donc uniforme, sur tout compact inclus dans le disque (ou l'intervalle) de convergence.

1.6 Opérations algébriques

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, et de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

• **Linéarité**

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)\, z^n$ a pour somme $\alpha f(z) + \beta g(z)$; son rayon de convergence R est tel que :

$$\begin{array}{ll} R = \min(R_1, R_2) & \text{si } R_1 \neq R_2 \\ R \geqslant R_1 & \text{si } R_1 = R_2 \end{array}$$

- **Produit**

Si l'on pose :

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n$ a pour somme $f(z)g(z)$; son rayon de convergence R est tel que $R \geqslant \min(R_1, R_2)$.

1.7 Continuité

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme $f(z)$.

La fonction f est continue sur son disque de convergence (cas complexe) ou son intervalle de convergence (cas réel).

2. Série entière d'une variable réelle

2.1 Dérivation

Si la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, alors f est dérivable dans $]-R, R[$ et l'on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.

> Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Mais, sur le bord de l'intervalle de convergence, les deux séries ne sont pas toujours de même nature.

2.2 Intégration

Si la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

3. Développement d'une fonction en série entière

3.1 Série entière associée à une fonction

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U contenant l'origine.

On dit que f est développable en série entière s'il existe une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ telle que :

$$\forall x \in]-R,R[\cap U \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\,.$$

On dit aussi que f est analytique en 0.

3.2 Condition nécessaire

Si f est développable en série entière avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, alors f est indéfiniment dérivable et $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\,.$

Donc, si le développement en série entière de f existe, il est unique.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ est la série de Taylor de f en 0.

Plus généralement, f est analytique en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel la somme de sa série de Taylor en x_0 est égale à $f(x)$, ce qui signifie qu'il existe $R > 0$ tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \qquad \text{pour} \qquad |x-x_0| < R\,.$$

Attention, il peut arriver que f soit indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et que sa série de Taylor diverge pour tout $x \neq 0$, ou qu'elle converge et que sa somme soit différente de $f(x)$.

3.3 Condition suffisante

Si f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle I défini par $|x - x_0| < R$ et s'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

alors f est analytique en x_0.

3.4 Développements de base

$\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

MP

My Ism

http ://

Feuille d'exercices:

Séries Entieres