

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

Résumé de cours: *Calcul différentiel*

13 novembre 2009

Blague du jour
Pendant une conférence de presse tenue à la Maison Blanche, le président George W. Bush accuse les mathématiciens et les informaticiens des États-Unis de promouvoir le programme démocratique.
«Tous les départements de mathématiques, ou du moins d'informatique proposent une introduction aux AlGore-ithmes, déplore-t-il. Mais pas un seul enseigne les GeorgeBush-ithmes...»

Mathématicien du jour *Schwarz.*
Hermann Amandus Schwarz, (1843-1921) est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.
Il a travaillé sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations.



Table des matières

1	Différentielle d'une application	2
1.1	Dérivation vectorielle.	2
1.2	Notion d'application différentiable.	3
1.3	Matrice Jacobienne	3
2	Dérivées partielles.	4
2.1	Dérivée suivant un vecteur	4
2.2	Fonctions de classe C^1	4
2.3	Gradient.	6
3	Dérivées d'ordre supérieures.	6
3.1	Fonctions de classe C^2	6
3.2	Extrema des fonctions réelles.	7
3.3	Fonctions de classe C^k , où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$	8
3.4	C^k -difféomorphismes.	8

1 Différentielle d'une application

1.1 Dérivation vectorielle.

Définition 1 .

Soit $f : I \rightarrow E$ où I est un intervalle de \mathbb{R} et E un espace de Banach. Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point t_0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe dans E , qu'on note par $f'(t_0)$ et qu'on appelle dérivée de f au point t_0 .

Proposition 1 .

Une application $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si toutes ses applications composantes $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en t_0 , dans ce cas $f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_p(t_0))$.

Remarque 1 .

– Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.
– L'application vectorielle $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si les applications coordonnées $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables au point t_0 , dans ce cas : $\vec{V}(t_0) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j}$.

Définition 2 . Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N}^*$

– Par récurrence on définit la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f au point $t_0 \in I$ de la façon suivante : f est k -fois dérivable au point t_0 si et seulement si f est $(k - 1)$ -fois dérivable au point t_0 et $f^{(k-1)}$ dérivable au point t_0 , dans ce cas on pose

$$f^{(k)}(t_0) = \left(f^{(k-1)} \right)'(t_0)$$

– On dira que f est de classe C^k sur I si elle est k -fois dérivable sur I , avec $f^{(k)}$ continue sur I , l'ensemble de telles fonctions se note $C^k(I, E)$.
– On dira que f est de classe C^∞ sur I si elle indéfiniment dérivable sur I , l'ensemble de telles fonctions se note $C^\infty(I, E)$.

Proposition 2 . Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

– Si f et g sont de classe C^k sur I , alors $f + \lambda g$ est aussi de classe C^k sur I . En particulier, $C^k(I, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel .
– Si f et g sont de classe C^∞ sur I , alors $f + \lambda g$ est aussi de classe C^∞ sur I . En particulier, $C^\infty(I, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel .

Théorème 1 . Formule de Leibniz générale.

Soient $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^n sur I et $B : E \times E \rightarrow F$ (Banach) bilinéaire, alors l'application $I \rightarrow F$ est de classe C^k , avec

$$(B(f(t), g(t)))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B \left(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t) \right).$$

Théorème 2 . Inégalité des accroissements finis.

Soient $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $\|f'(t)\| \leq k$ sur $]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k|b - a|$.

1.2 Notion d'application différentiable.

Définition 3 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ où U un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in U$. On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que $f(a + \vec{h}) - f(a) = \ell(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + \vec{h} \in U$.

L'application linéaire (qui est unique) $\ell(\vec{h})$ s'appelle la différentielle de f au point a appliquée au vecteur \vec{h} et se note $df_a(\vec{h})$, ainsi on a :

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = df_a(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|), \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } a + \vec{h} \in U.$$

Remarque 2 .

- La notion de différentiabilité sur \mathbb{R} généralise celle de la dérivabilité, plus précisément si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in I$, alors f est différentiable au point a si et seulement si f est dérivable au point a avec $df_a(h) = h \cdot f'(a)$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
- Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.
- Soit une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, avec $df_a = f$.

Proposition 3 .

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a , alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$d(f + \lambda g)_a(\vec{h}) = df_a(\vec{h}) + \lambda dg_a(\vec{h}), \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 4 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$d(g \circ f)_a(\vec{h}) = (dg)_{f(a)} \circ df_a(\vec{h}), \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Matrice Jacobienne

Définition 4 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en un point $a \in U$, sa matrice Jacobienne au point a est la matrice notée $\mathcal{J}_a f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, définie par la relation :

$$\mathcal{J}_a f = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df_a)$$

où $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont respectivement les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p .

Proposition 5 .

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a , alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(f + \lambda g) = \mathcal{J}_a f + \lambda \mathcal{J}_a g$$

Proposition 6 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(a)} g \cdot \mathcal{J}_a f$$

Remarque 3 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en un point $a \in U$, alors $J_a f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le déterminant s'appelle le Jacobien de f au point a .

2 Dérivées partielles.

2.1 Dérivée suivant un vecteur

Définition 5 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $a + t\vec{h} \in U \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

On dit alors que f admet au point a une dérivée suivant le vecteur \vec{h} si la fonction

$$\varphi_{\vec{h}} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{est dérivable en } 0, \text{ on pose alors}$$

$$t \mapsto f(a + t\vec{h})$$

$$D_{\vec{h}} f(a) = (\varphi_{\vec{h}})'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{h}) - f(a)}{t}$$

qu'on appelle dérivée de f au point a suivant le vecteur \vec{h} .

Définition 6 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On dit alors que f admet au point a une dérivée partielle par rapport à x_i si et seulement si $D_{\vec{e}_i} f(a)$ existe, dans ce cas on pose ;

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = D_{\vec{e}_i} f(a)$$

Remarque 4 .

– Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ La dérivée partielle $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ s'obtient en dérivant la fonction $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ au point a_i , c'est à dire : on fixe $n - 1$ variables et on dérive par rapport à l'autre variable.

– Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et continue en a et admet des dérivées partielles au $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ au voisinage de a , alors le Théorème des Accroissements Finis (TAF) s'écrit

$$f(a + t\vec{e}_i) - f(a) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha \vec{e}_i), \text{ tel que } \alpha \in]0, t[.$$

Proposition 7 .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en un point $a \in U$, alors f admet en a une dérivée suivant tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, avec

$$df_a(\vec{h}) = D_{\vec{h}} f(a)$$

En particulier f admet des dérivées partielles en a .

2.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Définition 7 .

Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe \mathcal{C}^1 en un point $a \in U$, si f admet au voisinage de a une dérivée suivant tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, $D_{\vec{h}} f$, continue en a .

L'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1 sur U se note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 3 .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ admet au voisinage de $a \in U$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ toutes continues en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 , avec

$$D_{\vec{h}} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i, \forall \vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$$

Théorème 4 .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 en a , alors f est différentiable en a avec

$$df_a(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i, \forall \vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$$

Proposition 8 .

– Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U , avec

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Ainsi $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel .

– La composée de deux applications de classe \mathcal{C}^1 est aussi de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 5 . Théorème de composition.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ un chemin inclu dans U dérivable, alors $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable, avec

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

Théorème 6 . Changement de variables.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ sont de classe \mathcal{C}^1 , alors

$$(u, v) \mapsto (x, y)$$

$$g(u, v) = f \circ \varphi(u, v) = f(x, y)$$

est de classe \mathcal{C}^1 , avec

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Remarque 5 . Coordonnées polaires.

Si on pose $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ et $g(r, \theta) = f(x, y)$, alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

En résolvant ce système d'inconnues $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$$

Théorème 7 . Inégalité des accroissements finis.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 tel que $\exists M \geq 0$ vérifiant $\|df_a(\vec{h})\| \leq k, \forall a \in U, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + \vec{h} \in U$, alors

$$\|f(a + \vec{h}) - f(a)\| \leq k \|\vec{h}\|$$

Théorème 8 . Inégalité des accroissements finis.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 où U ouvert connexe par arc, alors

f est constante si et seulement si $df_a = 0, \forall a \in U$.

2.3 Gradient.

Définition 8 .

On rappelle d'abord que pour toute forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(\vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{h}$.

En particulier, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors df_a est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , pour laquelle il existe un unique vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ tel que :

$$df_a(\vec{h}) = \overrightarrow{\text{grad}}f(a) \cdot \vec{h}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ s'appelle le gradient de f au point a .

Remarque 6 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , pour tout $a \in U, \vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$, on a : $df_a(\vec{h}) =$

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$, ainsi on conclut que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Proposition 9 .

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ et $f g$ sont de classe \mathcal{C}^1 , avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g)(a) &= \overrightarrow{\text{grad}}f(a) + \lambda \overrightarrow{\text{grad}}g(a) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f \cdot g)(a) &= g(a) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f(a) + f(a) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}g(a) \end{cases}$$

Définition 9 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , on appelle point critique ou stationnaire de f , tout point $a \in U$ vérifiant $\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \vec{0}$.

3 Dérivées d'ordre supérieures.

3.1 Fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

Définition 10 .

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^2 , si toutes ses dérivées partielles existent et sont de classe \mathcal{C}^1 .

On pose alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Théorème 9 . Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors pour tout $a \in U$, $\vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$ tel que $a + \vec{h} \in U$, on a :

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|\vec{h}\|)$$

En particulier, il existe une application bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tel que :

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = df_a(\vec{h}) + B(\vec{h}, \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$$

Théorème 10 . Théorème de Schwarz.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors pour tout $a \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Théorème 11 . Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en dimension 2.

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors pour tout $(a, b) \in U$, $h = x \vec{i} + y \vec{j} \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) + \vec{h} = (a + x, b + y) \in U$, on a :

$$f(a+x, b+y) - f(a, b) = x \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + x^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a, b) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + y^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a, b) + o(x^2 + y^2)$$

Remarque 7 .

En un point critique (a, b) , la formule précédente devient :

$$f(a + x, b + y) - f(a, b) = x^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a, b) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + y^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a, b) + o(x^2 + y^2)$$

3.2 Extrema des fonctions réelles.

Définition 11 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$:

- On dit que f admet au point a un minimum local, s'il existe un voisinage de a , $V \subset U$ tel que $f(a) \leq f(M)$, $\forall M \in V$.
- On dit que f admet au point a un minimum local strict, s'il existe un voisinage de a , $V \subset U$ tel que $f(a) < f(M)$, $\forall M \in V$.
- On dit que f admet au point a un maximum local, s'il existe un voisinage de a , $V \subset U$ tel que $f(a) \geq f(M)$, $\forall M \in V$.
- On dit que f admet au point a un maximum local strict, s'il existe un voisinage de a , $V \subset U$ tel que $f(a) > f(M)$, $\forall M \in V$.
- On dit que f admet au point a un extremum local, s'il admet en a un minimum ou maximum local.
- On dit que f admet au point a un extremum local strict, s'il admet en a un minimum ou maximum local strict.

Théorème 12 .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et admet en $a \in U$ un extremum local, alors

$$\vec{\text{grad}} f(a) = \vec{0}.$$

Remarque 8 .

La réciproque du théorème précédent est en général fausse, toute fois on a le résultat suivant :

Théorème 13 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $(a, b) \in U$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \overrightarrow{0}$ (point critique), on pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a, b), \quad t = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a, b).$$

- Si $r^2 - st < 0$ et $s > 0$, alors f admet en (a, b) minimum local strict.
- Si $r^2 - st < 0$ et $s < 0$, alors f admet en (a, b) maximum local strict.
- Dans les deux cas, on dit que (a, b) est un point elliptique.
- Si $r^2 - st > 0$, alors f n'admet pas en (a, b) d'extrémum local, car $f(x, y) - f(a, b)$ change de signe au voisinage de (a, b) .
- On dit que (a, b) est un point hyperbolique, point col ou selle.
- Si $r^2 - st = 0$, on ne peut rien dire. On dit que (a, b) est un point parabolique.

Théorème 14 . Extrema liés : la règle des multiplicateurs de Lagrange.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $V = \{x \in U \text{ tel que } f_i = 0, \forall 1 \leq i \leq p\}$. Si $f|_V$ admet un extrémum local en un point $a \in V$, alors

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{\text{grad}}f_i(a).$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ s'appellent les multiplicateurs de Lagrange au point a .

3.3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k , où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 12 .

- Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe \mathcal{C}^0 en un point $a \in U$, si elle est continue en ce point.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe \mathcal{C}^k en un point $a \in U$, si f admet au voisinage de a des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ toutes de classe \mathcal{C}^{k-1} en a .
- Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe \mathcal{C}^∞ en un point $a \in U$, si f est de classe \mathcal{C}^k en a , $\forall k \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^k sur U se note $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$, en particulier

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p).$$

Proposition 10 .

- Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe \mathcal{C}^k sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est de classe \mathcal{C}^k sur U , ainsi $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel .
- La composée de deux applications de classe \mathcal{C}^k est aussi de classe \mathcal{C}^k .

3.4 \mathcal{C}^k -difféomorphismes.

Définition 13 .

Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle \mathcal{C}^k -difféomorphisme de U sur V , toute application bijective $f : U \rightarrow V$ tel que f et f^{-1} soient de classe \mathcal{C}^k .

Pour $k = 0$, on parle plutôt d'homéomorphisme.

Remarque 9 .

Rappelons le resultat suivant :

Si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ continue bijective, alors f^{-1} est continue, donc f est un homéomorphisme.

Théorème 15 . Théorème d'inversion locale.

Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{N}^*$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ et de classe \mathcal{C}^k . Si $\det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$ en un point $a \in U$, alors il existent U_1 voisinage ouvert de a dans \mathbb{R}^n , V_1 voisinage ouvert de $f(a)$ dans \mathbb{R}^p tel que f soit un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de U_1 sur V_1 .

Théorème 16 . Théorème d'inversion globale.

Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \rightarrow V$ bijective et de classe \mathcal{C}^k , alors :

f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de U sur V si et seulement si $\det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$

Dans ce cas

$$(df_a)^{-1} = d(f^{-1})_{f(a)}, \forall a \in U$$

Théorème 17 . Théorème des fonctions implicites.

Soit $n \geq 2$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^k . Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, alors ils existent U_1 voisinage ouvert de $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$ dans \mathbb{R}^{n-1} et I intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant a_n et $\varphi : U_1 \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^k tels que, $\forall x \in U_1, \forall y \in I$, on a :

$$f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Remarque 10 . Cas particulier du théorème des fonctions implicites.

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^k et $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$, alors $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ et $\varphi : I =]a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2[\rightarrow J =]b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2[$ de classe \mathcal{C}^k telles que $\forall x \in I, \forall y \in J$, on a : $f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$. En particulier les courbes d'équation $y = \varphi(x)$ et $f(x, y) = 0$ coïncident au voisinage du point (a, b) dont ont même tangente :

$$(x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Ainsi, en posant $A = (a, b)$ et $M = (x, y)$, la relation devient $\overrightarrow{\text{grad}}f(A) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, c'est à dire que $\overrightarrow{\text{grad}}f(a, b)$ (quand il est non nul) est orthogonal au point (a, b) à l'équipotentielle d'équation $f(x, y) = 0$.

*Fin
à la prochaine*