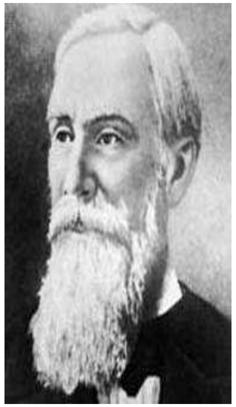
DL 1 Endomorphismes nilpotents.

Blague du jour

Un homme regarde un match de foot dans un café, lorsque son équipe nationale marque un but, le chien se met à courir dans tout les sens. Le voisin demande à l'homme : Qu'est ce qui lui arrive votre chien ?
- Il est supporter de l'équipe nationale, il est content.
- Ben dites donc, juste pour un but ! Et qu'est-ce-qu'il fait quand elle gagne un match ?!!
- Je ne sais pas, je ne l'ai que depuis 5 ans...



Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

Mathématicien du jour

Mathématicien russe, connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. Tchebychev appartient à l'école mathématique russe fondée par Daniel Bernoulli et Euler. Il démontra en 1850 une conjecture énoncée par Bertrand : Pour tout entier n au moins égal à 2, il existe un nombre premier entre n et $2n$.

Énoncé (cnc 2005, TSI)

E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. L'identité est notée I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = I_E$.
On considère un endomorphisme nilpotent u de E, c'est à dire un endomorphisme tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0$; on pose alors $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0\right\}$.

① **a** Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

b Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

c En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.

② On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

a Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

b Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com
مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $g^2 = I_E + u$.

a Soit $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $(x_1, u(x_1), \cdots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E et qu'il existe $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_1)$.

b Vérifier que $g \circ u = u \circ g$ et montrer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k$.

c Justifier que la famille $(I_E, u, \cdots, u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de 2 façons, montrer que $\alpha_0^2 = 1$, $2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ pour $2 \leq q \leq n-1$ (si $n \geq 3$).

d Montrer alors que $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ et que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, α_k peut être exprimé de manière unique en fonction de α_0.

e Conclure qu'il y a exactement deux endomorphismes de E dont le carré est égal à $I_E + u$.

③ ☛ :**Application** : Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

FIN
FIN

Á la prochaine

.

Corrigé (Pr. Mamouni, Rabat)

① **a** $p=\min\{k\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } u^k=0\}$, donc $u^{p-1}\neq 0$, et par suite $\exists x_0\in E$ tel que $u^{p-1}(x_0)\neq 0$.

b Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq p}$ tel que $\lambda_0x_0+\lambda_1u(x_0)+\ldots+\lambda_{p-1}u^{p-1}(x_0)=0$, on compose par u^{p-1} et comme $u^k=0,\quad \forall k\geq p$, alors $\lambda_0u^{p-1}(x_0)=0$, or $u^{p-1}(x_0)\neq 0$, d'où $\lambda_0=0$, ce qui donne $\lambda_1u(x_0)+\ldots+\lambda_{p-1}u^{p-1}(x_0)=0$, on compose cette fois par u^{p-2}, ce qui donne
$\lambda_1u^{p-1}(x_0)=0$, d'où $\lambda_1=0$ et on re-itère le même procédé jusqu'à montrer que tous les λ_i sont nuls. D'où la famille $\mathcal{C}=(x_0,u(x_0),\ldots,u^{p-1}(x_0))$ est libre.

c $\mathcal{C}$ est libre, donc $\mathrm{card}(\mathcal{C})=p\leq\dim(E)=n$, or $u^p=0$ et $n\geq p$, d'où $u^n=0$.

② **a** $v^{2p}=(v^2)^p=u^p=0$ et $v^{2(p-1)}=u^{p-1}\neq 0$.
Posons : $q=\min\{k\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } v^k=0\}$, donc $2(p-1)<q\leq 2p$, et comme dans ce qui précède pour u, on peut aussi affirmer pour v que $q\leq n$, ainsi $2(p-1)+1\leq q\leq n$, d'où $2p-1\leq n$, d'où $p\leq\dfrac{n+1}{2}$.

b Soit $=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. On a $M^2=0$ et $M=0$, donc $p=2$, pour $M\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, d'où suivant la question précédente si $X^2=M$, on devrait avoir $p\frac{3}{2}$, ce qui n'est pas le cas, donc l'équation $X^2=M$, n'admet pas de solutions.

③ **a** De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille $(x_1,u(x_1),\ldots,u^{n-1}(x_1))$ est libre, or son cardinal est égal à $n=\dim(E)$, donc c'est une base, et pas suite c'est une famille génératrice de E, or $g(x_1)\in E$, d'où l'existence de nombres réels $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ tel que $g(x_1)=\alpha_0x_1+\alpha_1u(x_1)+\ldots+\alpha_{n-1}u^{n-1}(x_1)$.

b $g^2=u+I_E$, d'où $u=g^2-I_E$ et donc $gu=g^3-g=ug$.
Et par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, on montre que $gu^k=u^kg$.
D'autre part on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} g(x_1)= & \alpha_0x_1+\alpha_1u(x_1)+\ldots+\alpha_{n-1}u^{n-1}(x_1)\\ gu(x_1)= & u(g(x_1))=\alpha_0u(x_1)+\alpha_1u(u(x_1))+\ldots+\alpha_{n-1}u^{n-1}(\\ \vdots & \\ gu^{n-1}(x_1)= & u^{n-1}(g(x_1))=\alpha_0u^{n-1}(x_1)+\ldots+\alpha_{n-1}u^{n-1}(u^{n-1}(x \end{cases}$$

Ainsi g et $\alpha_0I_E+\ldots+\alpha_{n-1}u^{n-1}$ coïncident sur la base $(x_1,u(x_1),\ldots,u^{n-1}(x_1))$, et comme elles sont linéaires elles coïncident sur E.

c Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ tel que $\lambda_0I_E+\lambda_1u+\ldots+\lambda_{p-1}u^{n-1}=0$, on applique cette relation à x_1, on trouve $\lambda_0(x_1)+\lambda_1u(x_1)+\ldots+\lambda_{p-1}u^{n-1}(x_1)=0$, or la famille $(x_1,u(x_1),\ldots,u^{n-1}(x_1))$ est libre,
d'où $\lambda_i=0,\forall 1\leq i\leq n$, et donc $(I_E,u,\ldots,u^{n-1})$ est libre.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

1 ére façon : $g^2 = I_E + u$.

2 ème façon : $$g^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k\right)^2 = \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k}\right) u^q = \sum_{q=0}^{n} \beta_k u^q \qquad \text{Avec : } \beta_k = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k}$$

Et par identification puisque la famille $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, on a alors : $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\beta_q = 0, \quad \forall q \geq 2$.

d $\alpha_0^2 = 1$, donc $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$.

Montrons par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n\}$, que α_q s'exprime de façon unique en fonction de α_0.

Pour $q = 1$, on a : $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\alpha_0}$, donc le résultat est vrai pour $q = 1$, supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $q - 1$, et montrons que c'est vrai pour q.

En effet $\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$, donc $2\alpha_q\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k \alpha_{q-k}$, or $1 \leq k \leq q-1$ et $1 \leq q-k \leq q-1$, d'où les $\alpha_k\alpha_{q-k}$ s'expriment de façon unique en fonction de α_0, donc leur somme aussi, et par la suite $2\alpha_q\alpha_0$ aussi et finalement α_q aussi.

e Les solutions, g de l'équation $g^2 = I_E + u$, sont de la forme $g = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$, or $\forall q \in \{1, \dots, n\}, \alpha_q$ s'exprime de façon unique en fonction de $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$. Donc deux possibilités suivant la valeur prise par α_0.

④ L'équation peut s'écrire sous la forme $X^2 = I_1 + A$, avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$, donc $X = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$, avec les relations suivantes :

$\alpha_0 \in \{-1, 1\} \qquad 2\alpha_0\alpha_1 = 1$

$2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 \quad 2\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0$

Les solutions possibles sont :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 & , \alpha_1 = \dfrac{1}{2} & , \alpha_2 = -\dfrac{1}{4} & , \alpha_3 = \dfrac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1 & , \alpha_1 = -\dfrac{1}{2} & , \alpha_2 = \dfrac{1}{4} & , \alpha_3 = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Fin

Fin

Á la prochaine