.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°21

Courbes
Une cardioïde et sa développée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
Si vous êtes un obsessif-compulsif, appuyez sur le 1 sans arrêt.
Si vous êtes dépendant affectif, demandez à quelqu'un d'appuyer sur le 2 pour vous.
Si vous souffrez d'un désordre de personnalité multiple, appuyez sur les 3, 4, 5 et 6.
Si vous êtes paranoïaque, restez en ligne, nos agents tracent votre appel.
Si vous êtes schizophrène, écoutez attentivement et une voix vous dira sur quel numéro appuyer.

René Descartes (1596-1650)

Mathématicien du jour

Mathématicien, physicien et philosophe français. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne, du mécanisme, de la géométrie analytique. Toutefois, certaines de ses théories ont par la suite été contestées (théorie de l'animal-machine) ou abandonnées (théorie des tourbillons ou des esprits-animaux). Sa méthode philosophique et scientifique affirme un dualisme substantiel entre l'âme et le corps. Il radicalise sa position en refusant d'accorder la pensée à l'animal, le concevant comme une « machine », c'est-à-dire un corps entièrement dépourvu d'âme. Cette théorie sera critiquée à l'époque des Lumières, notamment par Voltaire, Diderot et Rousseau.

Source : cnc 2007, PSI

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orient de direction $\overrightarrow{E}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{E}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.
Un point M de E peut être repéré par ses coordonnes cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnes polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birgulier et un point M de γ, on note :
- s l'abscisse curviligne de M sur γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent γ en M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta), \overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{T}})$.

1 Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1+\cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

1. a Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

   b Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie préciser.

   c Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0,\pi],\psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0,\pi]$.

2. préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.

3. Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birgulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

4. Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1+\cos\theta$ sur le segment $[0,\pi]$ et dresser son tableau de variations.

5. Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnes (unité : 3cm).

6. Calculer la longueur de l'arc γ_2.

7. Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

2 Deuxième partie

2.1 A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orient dans le sens des θ croissants.
On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

1. Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

2. Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ l'aide de f et f'.

3. Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

4. Exprimer les coordonnes de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$.

2.2 B- Retour l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 oriente dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure not $I(\theta)$.

1 Préciser les coordonne de $\mathbf{I}(\theta)$ d'abord dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

2 Montrer que le point $\mathbf{I}(\theta)$ est l'image du point $\mathbf{M}(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

3 On note $\mathbf{H}(\theta)$ le projet orthogonal du point $\mathbf{I}(\theta)$ sur la droite $\big(\mathbf{OM}(\theta)\big)$ joignant les points $\mathbf{O}$ et $\mathbf{M}(\theta)$. Montrer que le point $\mathbf{H}(\theta)$ est l'image du point $\mathbf{M}(\theta)$ par une homothétie de centre $\mathbf{O}$ dont on précisera le rapport μ.

4 On note $\gamma_{\mathbf{I}}$ et $\gamma_{\mathbf{H}}$ les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $\mathbf{I}(\theta)$ et son projet orthogonal $\mathbf{H}(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, $\gamma_{\mathbf{I}}$ et $\gamma_{\mathbf{H}}$ sur le même graphique, et placer un point $\mathbf{M}(\theta)$ de γ_1 et les points $\mathbf{I}(\theta)$ et $\mathbf{H}(\theta)$ correspondant.

5 Donner la longueur de la courbe $\gamma_{\mathbf{H}}$ décrite par le point $\mathbf{H}(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimitée.

Fin

À la prochaine