

Devoir Surveillé

3 Espaces d'Artin et applications

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?

- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.

Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) définie de la façon suivante : $H_1 = (1)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Mathématicien du jour

Énoncé : Extrait Centrale 2010, MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} .
- On fixe un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans \mathbb{K} . On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E , c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E , on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E, h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

- a) Montrer que, pour tout x de E , $h(x)$ est élément du dual de E , noté E^* .
- b) Montrer que h est une application linéaire de E dans E^* .

I.A.2) Si A est une partie de E , on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera A^\perp au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.

Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On note $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e .

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\text{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\text{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e .

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y$ où $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^t X$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X .

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on note q_φ l'application de E dans \mathbb{K} définie par : $\forall x \in E, q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ . On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E , notée φ , telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q . On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E , on notera $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e .

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E . Soit E' un second \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , et soit q' une forme quadratique sur E' .

On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E, q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q') .

Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \dots, c_{2p})$ la base canonique de \mathbb{K}^{2p} .

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}, \text{ on pose } q_p(x) = 2 \sum_{i=1}^p x_i x_{i+p}.$$

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur \mathbb{K}^{2p} et calculer $\text{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin* (ou *espace artinien*) de dimension $2p$ tout couple (F, q) , où F est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et (\mathbb{K}^{2p}, q_p) sont isométriques.

Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.

Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que (\mathbb{C}^{2p}, q) est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, \text{ on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2.$$

Montrer que (\mathbb{R}^{2p}, q') est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note encore $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e . Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. On note F l'espace engendré par e_1, \dots, e_p .

a) Montrer que F^\perp est l'image réciproque par h de $\text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note φ_F la restriction de φ à F^2 . On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.

Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- F^\perp est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ' . Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x, y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x, y)$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit que e est q -orthogonale si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = x^2 - y^2$ et $q'(x, y) = 2xy$.

Déterminer une base q -orthogonale et une base q' -orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de \mathbb{R}^2 orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q' .

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q|_\Pi)$ soit un plan artinien (où $q|_\Pi$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \frac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E . On suppose que (e_1, \dots, e_s) est une base de $F \cap F^\perp$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F .

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^\perp$ (en commençant par $\dim(F \cap F^\perp) = 1$, puis $\dim(F \cap F^\perp) > 1$) qu'il existe s plans P_1, \dots, P_s de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

- 1) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $(P_i, q/P_i)$ est un plan artinien contenant e_i
- 2) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j .
- 3) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, P_i est orthogonal à G .

II.C.3) Montrer que $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ est non singulier.

On dira que \bar{F} est un complété non singulier de F .

II.C.4) Montrer que si $q/F = 0$, alors $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E, q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q/F = 0$.

Partie III -

On note $O(E, q)$ l'ensemble des isométries de (E, q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in E, q(f(x)) = q(x).$$

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E .

a) Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E, q)$, alors $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

b) Soit e une base de E . Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$$(x, y) \mapsto \varphi(f(x), f(y)) \text{ en fonction de } \text{mat}(f, e) \text{ et de } \text{mat}(\varphi, e).$$

c) Posons $M = \text{mat}(f, e)$ et $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$.

Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si $\Omega = {}^t M \Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E, q)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$. On notera :

$$O^+(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = 1\} \text{ et } O^-(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = -1\}.$$

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

a) Montrer que $s \in O(E, q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à F^\perp , où F est un sous-espace non singulier de E .

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à H^\perp . Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^-(E, q)$.

d) Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x - y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x - y\}^\perp$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B.3) Soit $f \in O(E, q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x) - x) = 0$.

On se propose de démontrer que $f \in O^+(E, q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Montrer que $q/V = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^\perp$. Montrer que q/H n'est pas identiquement nulle.

En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$.

- d) On note $U = \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Montrer que $q|_U = 0$.
- e) Montrer que $U^\perp = V = U$.
- f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^+(E, q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E, q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n - 1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x) - x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q|_F)$ dans $(F', q|_{F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g|_F = f$. »

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x + y)$ ou $q(x - y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

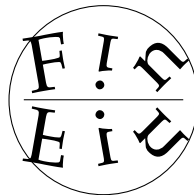
b) Supposons qu'il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g|_{F_1} = f|_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q|_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h|_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})|_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E, q)$ telle que $k|_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.



À la prochaine