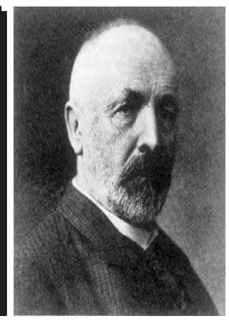
CPGE My Youssef, Rabat

DS 3 (09-10): *Calcul différentiel Dualité et Réduction*

Jeudi 10 Décembre 2009
Durée : 4 heures

Le problème de l'éléphant et le frigo
Comment faire entrer un éléphant dans un frigo par les analystes ?
Différentiez-le et faites-le entrer dans le frigo. Puis intégrez-le, toujours dans le frigo.

Mathématicen du jour ***Cantor.***
Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918) est un mathématicien russo-allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Son travail est d'un grand intérêt philosophique et a donné lieu à maintes interprétations et à maints débats. Kronecker et Poincaré en étaient farouchement opposés, alors que Hilbert en était un défenseur férevent. Ces hostilités en plus de la mort de son plus jeune fils, lui ont causé une dépression chronique dont il mourra. Cantor fut lauréat de la médaille Sylvester de la Royal Society.



Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante: 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

PROBLÈME I : **Extrait d'un DS de MP*, CPGE My Youssef, Rabat.**

Remerciements pour Mr Taibi Mimoun, pour la source latex du problème I

Notations :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension supérieure strictement à 1 . A un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle sur E .
Pour n un entier, $n \geq 2$; on note $\mathcal{M}_n = M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{M}_n^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n$.

La matrice $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve à la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne, qui vaut 1 .

Si $M \in \mathcal{M}_n$, on note $vect(M)$ le sou-espace de $\mathcal{M}_n$ engendré par M.

Si $M = (m_{i,j}) \in M_n$, on note $T(M)$ ou $T_n(M)$ le réel $\sum_{i=1}^{n} m_{i\ i}$ appelé trace de M.

1- Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = u(x)A$$

- **a) Quel est le rang de f ?**
- **b) Pour p entier naturel, déterminer f^p en fonction de p, f, u et A .**
- **c) Déterminer les éléments propres de f.**

Dans toute la suite de la partie I, on suppose que E est de dimension finie, avec $dimE = n > 1$.

2- Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que f soit diagonalisable.

3- Soit g un endomorphisme de E de rang 1 .

- **a) Monter que, pour que g soit diagonalisable il faut et il suffit que l'endomorphisme g^2 soit non nul .**
- **b) On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle g a pour matrice :**

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{notée encore } E_{1,n}.$$

4- Trace d'une matrice carrée - Trace d'un endomorphisme :

- **a) Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, $M \mapsto T(M)$ est une forme linéaire.**
- **b) Montrer que : $T(AB) = T(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace .**

> **Définition 1 . La trace d'un endomorphisme g d'un espace vectoriel E de dimension finie , notée $T(g)$, est la trace de sa matrice relativement à une base quelconque de E.**

- **c) Soit ρ un projecteur de E. Montrer que $T(\rho) = rg(\rho)$.**

5- .

- **a) Montrer que deux matrices carrées de rang 1, sont semblables si, et seulement si elles ont même trace .**
- **b) Soit $g \in L(E)$ tel que $rg(g) = T(g) = 1$. Montrer que g est un projecteur de E.**

6- Trouver une matrice carrée inversible P telle que :

$$P.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.P$$

7- Soit $M \in \mathcal{M}_n$ de rang 1.
Trouver une relation entre M^2 et M.
Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_3$ telle que $M^2 = 0$.

PROBLÈME II

Source : Concours 2003, Banque Filière PT

Partie III

Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x - y|$$

où k est une constante strictement inférieure à 1.
On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I.

1. Montrer que la fonction f est continue sur I.
2. Montrer que si x_1 et x_2 sont deux réels vérifiant
$$f(x_1) = x_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = x_2,$$
alors $x_1 = x_2$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I.
4. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Partie IV

Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.
On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que
$$\forall (x, y) \in B, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}.$$
3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,
$$\left|g(x, y') - g(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}|y - y'|.$$
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \times [b - r, b + r] \subset U$ et tel que
$$\forall x \in I, \qquad \left|g(x, b) - g(a, b)\right| \leq \frac{r}{2}.$$

5. Déduire des deux dernières inégalités que
$$\forall (x,y) \in I \times [b-r, b+r], \qquad g(x,y) \in [b-r, b+r].$$
6. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \longmapsto g(x,y)$ est une application contractante sur $[b-r, b+r]$.
7. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b-r, b+r]$ tel que $f(x,y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$ et on admet que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
8. Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ sur I. En déduire l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f.

Partie V

Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x,y) \in U, f(x,y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$.

1. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b) = 0$ et tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) et contenu dans U, un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que
   $$\big((x,y) \in V,\ f(x,y) = 0\big) \iff \big(x \in I, y = \varphi(x)\big).$$
   (b) Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$, alors
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$
   (c) La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose maintenant que le point (a,b) vérifie $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$.
   Montrer que l'implication de la question V1b est encore vraie.

Partie VI

Trouver le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (On pourra utiliser les résultats de la partie V).

Partie VII

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\right\}$$
$$\widetilde{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y < 1\right\}$$
On remarquera que D est un ensemble fermé et que $\tilde{D}$ est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble D.
2. Montrer que l'ensemble D est borné.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$f(x,y) = x^2 e^y.$$
   Montrer que F admet un maximum global et un minimum global sur D.
4. Chercher les extrema locaux de F sur $\widetilde{D}$.
5. Déterminer les extrema globaux de F sur D.

Fin
Bonne chance