Mamouni My Ismail

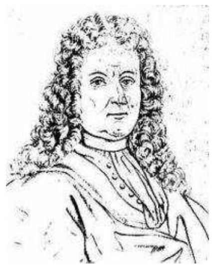
Devoir Libre n°29 (Pr. Michel Quercia)

Équations différentielles
Exemples d'étude qualitative

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !.
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"



La famille des Riccati

Mathématicien du jour

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

1 Exemple d'une étude qualitative.

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t, x) \mid x^2 - t < 0\}$. Soit x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$.

1. Supposons $\exists t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geq 0$.
   - a. Montrer que $t_1 = \min\{t > t_0 \mid x^2(t) - t > 0\}$ existe, puis que $x^2(t_1) - t_1 = 0$.
   - b. En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.
   - c. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, étudier la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$ puis en déduire une contradiction.
   - d. Si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, de façon pareille en déduire une contradiction.

2. En déduire que la courbe intégrale reste dans D_0.

3. Supposons que la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$.
   - a. Montrer que pour tout $t \in [t_0, \beta[$, on a $-\beta \leq x'(t) \leq 0$.
   - b. En déduire que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$, puis que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β.
   - c. En déduire une contradiction.

4 Conclure que $\beta = +\infty$.

5 En remarquant que pour tout $t \geq t_0$, on a $x'(t) < 0$, montrer que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$.

6 En déduire que $x''(t) \geq 0$ à partir d'un certain rang, puis que $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

7 On suppose que $\ell \neq 0$.

a Montrer que $x(t) \sim \ell t$, puis que puis et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$.

b En déduire que $x'''(t_2) = 2x + \dfrac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand.

c En déduire une contradiction.

8 En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

2 Étude d'un système autonome de taille 2.

Soit $n > 0$ et (S) : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$

1 Soit $\gamma \ : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver d'autres solutions présentant une symétrie avec γ.
Réponse : $\gamma_1(t) = (-x(t), y(t))$ et $\gamma_2(t) =$ ... sont aussi solutions de (S).

2 Montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t.

3 De même, montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$ pour tout t.

4 En déduire que pour λ, μ non nuls et x ne s'annulant pas, $\sigma : t \mapsto \lambda(x(\mu t), y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu = \lambda$.

5 En déduire des symétries des solutions maximales de (S).

6 En déduire que toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport cet axe.

7 On se propose de déterminer les courbes du plan formes des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy).

a Montrer que si on a $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire.

b Montrer que si on a $y(t_0) = 0$, alors $x(t_0) = 0$ est arbitraire.

c En déduire que l'ensemble des points où la tangente est verticale est la réunion des deux axes (Ox) et (Oy) privée de $(0, 0)$.

c Avec un raisonnement pareil, montrer que l'ensemble des points où la tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0, 0)$.

d En déduire quelques solutions particulières.

Réponse : $x(t) = 0, y(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$.

8. On suppose qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$.

a. Montrer que $\frac{2}{n} x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \Phi^2$.

b. En déduire que $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.

c. Montrer que pour une courbe intégrale qui ne touche aucun des deux axes, on peut exprimer y en fonction de x

Réponse : $x'(t) \neq 0$, donc $t \mapsto x(t)$ injective.

d. Montrer qu'une courbe intégrale qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe.

e. Montrer que pour une courbe intégrale qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$, on a :

$$y(x) = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}.$$

f. En déduire toutes les courbes intégrales.

À la prochaine