Corrigé : Pr. Dufait, CPGE France

Exercice 1

1 Soit, pour $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$. On a $\forall n \geq 2$, $a_n > 0$ et $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, selon la règle de D'Alembert, $\underline{R=1}$.

2 Pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = b_n - c_n$ et, comme ci-dessus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ montre que les séries $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n+1}$ ont aussi comme rayon de convergence 1. On peut donc écrire, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left[\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right]$$

soit $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, S(x) = \dfrac{1-x^2}{x}\ln(1-x) + 1 + \dfrac{x}{2}$ et $S(0) = 0$.

3 Pour $x \in]0,1[$, $S(x) = \dfrac{1+x}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1 + \dfrac{x}{2}$ donc $\underline{\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \dfrac{3}{2}}$.

Exercice 2

1 Sur $]0,+\infty[$ l'équation homogène associée à (E) : $2xy' - 3y$ a pour solutions les applications $x \mapsto C\,\exists p\left[\dfrac{3}{2}ln|x|\right] = C\,x^{3/2}$ avec $C \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Puis la méthode de variation de la constante permet d'écrire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sous la forme $y(x) = C(x)\,x^{3/2}$ avec C dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, $2x^{5/2}C'(x) = x^{1/2}$ soit $C(x) = -\dfrac{1}{2x} + K$. Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

2 Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, selon [1], il existe $K \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x > 0$, $y'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x}} + \dfrac{3K}{2}\sqrt{x}$ et donc $y'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ ce qui interdit à y d'être dérivable en 0. Donc $\underline{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ est vide}}$.

Problème

Question préliminaire

1 $\underline{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$.

b $\underline{(i) \Longrightarrow (ii)}$.

Partie I

2 $C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
E contient clairement la fonction nulle donc $E \neq \emptyset$ et si $(f,g,\lambda) \in E\times E\times\mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto (f(t)+\lambda g(t))\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f+\lambda g \in E$. Donc $\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$.

b $F = C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et si $f \in F$, on a $\forall x > 0$, $\forall t \in$

$\mathbb{R}_+$, $|f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

c Par linéarité de l'intégrale sur $L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, pour tout $(f,g,\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$,

$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f+\lambda g)(x) = \int_0^{+\infty} (f(t)+\lambda g(t))\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(x) + \lambda\mathcal{L}(g)(x)$

soit $\mathcal{L}(f+\lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda\mathcal{L}(g)$. Donc $\mathcal{L} \in \mathcal{L}\left(E, \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})\right)$.

3 $\mathcal{U} \in F$ donc $\mathcal{U} \in E$ et $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}$ soit $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}$.

b ◇ De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |h_\lambda(t)| \leq 1$ donc $h_\lambda \in E$.

◇ $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(\mathcal{U})(x+\lambda)$ donc $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{x+\lambda}$.

4 ◇ $\frac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} = t^n\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists\, A > 0,\ \forall t \geq A,\ \frac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \leq 1$ soit $\exists\, A > 0,\ \forall t \geq A,\ t^n\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.

◇ $g_n \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $\forall x > 0,\ g_n(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\right)$ et $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $/R_+$ donc $t \mapsto g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi. Ainsi $g_n \in E$.

5 Déjà, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc $f' \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Puisque f est croissante, on a $f' \geq 0$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t)\mathrm{e}^{-xt} \geq 0$ et, selon [1.a], il suffit de montrer que $\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,

$$\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right] + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = f(y)\mathrm{e}^{-xy} - f(0) + x\int_0^y f(t)$$

Or $f \in E$ implique, d'après [1.a], $\forall x > 0,\ \int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}(f)(x)$. D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0,\ \forall y \geq 0\ |f(y)\mathrm{e}^{-xy}| \leq \|f\|_\infty\mathrm{e}^{-xy} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne $f' \in E$ et $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6 Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a,+\infty[$, en posant pour $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \phi(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$:

- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, $\mathrm{d}\phi x(x,t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$ existe,
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \mathrm{d}\phi x(x,t)$ continue sur $[a,+\infty[$,
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, l'application $t \mapsto \mathrm{d}\phi x(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x \in [a,+\infty[,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\mathrm{d}\phi x(x,t)| \leq t|f(t)|\mathrm{e}^{-at} = |g_1(t)|\mathrm{e}^{-at}$ et, selon [4], $t \mapsto g_1(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,

donc $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur $[a,+\infty[$ et $\forall x \in [a,+\infty[,\ (\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\phi x(x,t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(g_1)(x)$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)$.

b Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n sur $]0,+\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$:

→ pour $n = 0$, puisque, selon [a], $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, à fortiori, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^0 sur $]0,+\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;

→ si le résultat est vrai pour n, en appliquant [a] à g_n qui appartient à E d'après [4], on obtient que $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $(\mathcal{L}(g_n))' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$, car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $t\,g_n(t) = g_{n+1}(t)$. On a donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0,+\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_n)$. Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.

Partie II

7 $f \in F$ donc $\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0,\ |\mathcal{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \text{ si } x > 0,$$

d'après [3.a]. On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b On retrouve ici les hypothèses de la question [5] : f de classe C^1, croissante et bornée. On a donc $\forall x > 0$, $x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$. Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant [a], $\mathcal{L}(f')(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $x\,\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)$.

8 On a $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} |f(t)| = |\ell| < |\ell| + 1$ et donc $\exists A \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \geq A$, $|f(t)| \leq |\ell| + 1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq \max\left(\sup\limits_{u\in[0,A]} |f(u)|, |\ell| + 1\right)$. Ainsi $f \in F$.

b En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{u}{a_n}$, on a

$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t)e^{-a_n t}\,dt = a_n \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right) e^{-u}\,\frac{1}{a_n}du$$

soit $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du$ avec $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $h_n(u) = f\left(\dfrac{u}{a_n}\right) e^{-u}$.

c Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $|h_n(u)| \leq \|f\|_\infty e^{-u}$ et $u \mapsto \|f\|_\infty e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- $h_n \longrightarrow h$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(u) = \begin{cases} \ell\,e^{-u} & si u>0 \\ f(0) & si u=0 \end{cases}$ car $\dfrac{u}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $u > 0$,
- h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} h(u)\,du = \ell \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$ ce qui donne, avec le résultat du [b], $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

d Ceci est vrai pour toute suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers 0 donc la caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure que $\lim\limits_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ce qui donne, si $\ell \neq 0$, $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$.

9 ◇ Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $[x,+\infty[$ pour $x \geq 0$, R est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $R(x) =$

$R(0)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et c'est une primitive de f. On a donc R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $R'=-f$.

⋄ On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question [5] à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R'=-f$ appartient à E car $f\in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0\in\mathbb{R}$ donc R appartient à F selon [8.a] et la démonstration de l'égalité au [5] n'utilise que que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E. Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\mathcal{L}(f)(x)=R(0)-x\mathcal{L}(R)(x)$.

b ⋄ On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$ donc $\forall\varepsilon>0,\ \exists A\in\mathbb{R}_+,\quad\forall t\geq A,\ |R(t)|\leq\varepsilon$.

⋄ On a donc, pour $x>0$, selon [a],

$$\begin{cases}|\mathcal{L}(f)(x)-R(0)| & =|x\mathcal{L}(R)(x)|=x\left|\int_0^{+\infty}R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right|\\ & \leq x\int_0^{+\infty}|R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\quad\text{car } R\in E\\ & \leq x\int_0^{A}|R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t+x\int_A^{+\infty}|R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\\ & \leq x\int_0^{A}|R(t)|\,\mathrm{d}t+x\int_A^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\text{car } \mathcal{U}\in E\\ & \leq x\int_0^{A}|R(t)|\,\mathrm{d}t+x\int_0^{+\infty}\varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

soit $\forall x>0,\ |\mathcal{L}(f)(x)-R(0)|\leq x\int_0^A|R(t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon$.

c A étant fixé, $x\int_0^A|R(t)|\,\mathrm{d}t\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$ donc $\exists\eta>0,\ \forall x\in]0,\eta[,\quad 0\leq x\int_0^A|R(t)|\,\mathrm{d}t\leq\varepsilon$ donc $\forall x\in]0,\eta[,\ |\mathcal{L}(f)(x)-R(0)|\leq2\varepsilon$. Donc $\mathcal{L}(f)$ se prolonge en 0 par $\mathcal{L}(f)(0)=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque : *Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l' intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais d'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ improprement convergente comme l'énoncé lui-même le souligne au* [10.d].

Partie III

10 La fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\dfrac{\sin t}{t}\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}1$ et on a, pour tout $x>0$,

$$\begin{cases}F(x) & =\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x-\\ & =\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\cos(1)-\frac{\cos x}{x}-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\cos(1\end{cases}$$

car, d'une part, $\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et, d'autre part, $\dfrac{\cos t}{t^2}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc F admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

b Si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\sum\limits_{n=0}^N u_n=\int_0^{(N+1)\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$. Mais

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\geq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\dfrac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t$

ce qui montre que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge. Ainsi f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c ◇ On peut écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \Im m\left(e^{it}\right)$ donc

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^X \sin t\, e^{-xt}\, dt &= \Im m\left(\int_0^X e^{(-x+i)t}\, dt\right) = \Im m\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^X\right) = \Im m\left(\frac{e^{(-x+i)X}-1}{-x+i}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{(-x-i)\left[(\cos X + i\sin X)e^{-xX}-1\right]}{x^2+1}\right) \end{aligned}\right.$$

ce qui donne bien $\forall x > 0,\ \forall X > 0,\quad \int_0^X \sin t\, e^{-xt}\, dt = -\dfrac{1}{x^2+1}\left[(\cos X + x\sin X)e^{-xX} - 1\right]$.

◇ $\sin \in F$ donc $\sin \in E$ donc pour tout $x > 0$, $t \mapsto \sin t\, e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

◇ En passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\forall x > 0,\quad \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x^2+1}\ .$$

d ◇ f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc , selon [8.a], $f \in F$. Donc $f \in E$ et la question [6.a] donne $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(\sin)$ soit, d'après [c], $\forall x > 0$, $(\mathcal{L}(f))'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$. Ainsi, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que donc $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = C - \operatorname{Arctan} x$. Mais, selon la question [7], $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit $C = \dfrac{\pi}{2}$. Finalement, $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

◇ Comme on en a fait la remarque à la fin de la question [9], l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat du [9.c] : il est suffisant que $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X f(t)\, dt$ existe pour cela. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui donne $\ell = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Fin

Fin

Á la prochaine