

Devoir Libre

12 Convergence quadratique des intégrales

Blague du jour

Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :

- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !



Ibn Battuta, (1304 Tanger-1369 Marrakech)

Explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent à l'Inde, la Chine, au Kazakhstan, l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appelé Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

Mathématicien du jour

Énoncé : e3a 2006, MP

Notations

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0.

$\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans \mathbb{R} et on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R} et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) ; \int_I |f| \text{ existe} \right\} \text{ et } \forall f \in L^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f|,$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) ; \int_I |f|^2 \text{ existe} \right\} \text{ et } \forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

Partie I

① Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :

$$y' + cy = f$$

admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I , et qui vérifie :

$$\varphi(f)(0) = 0.$$

Démontrer :

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt.$$

- ② Exprimer $\varphi'(f)$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose, dans cette partie, que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leq 0 < b$.

- ① Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty.$$

- ② Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$

- ③ Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1.$$

- ④ Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2.$$

En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

- ⑤ L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue

- a** lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
b lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?
c lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

- ① Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.
 ② Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.
 ③ Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.
 ④ Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_1.$$

- ⑤ On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.

Démontrer :

$$\forall X > 0, \frac{g^2(X)}{2} + c \int_0^X g^2(t) dt = \int_0^X f(t)g(t) dt.$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :

$$\|\varphi\|_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_2.$$

Partie IV

Soit R un réel strictement positif. On note G l'espace vectoriel réel des fonctions développables en série entière sur l'intervalle $] -R, R[$.

- ① Démontrer que φ est un endomorphisme de G .
- ② Pour f élément de G , on note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles pour lesquelles :

$$\forall x \in] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } \varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Exprimer, pour tout entier naturel n , b_n en fonction des termes de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

On pourra utiliser la relation $f = \varphi(f)' + c\varphi(f)$.

Partie V

I désigne maintenant un intervalle quelconque de \mathbb{R} contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I), \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}.$$

- ① **a** Démontrer que, si f et g sont dans $H(I)$, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I .
- b** Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} H(I)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi : (f, g) &\mapsto \phi(f, g) = \int_I f(t)g(t) dt + \int_I f'(t)g'(t) dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur $H(I)$.

- c** En déduire que l'application $\|\cdot\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I), \|f\|_H = \sqrt{\int_I f(t)^2 dt + \int_I f'(t)^2 dt}$$

est une norme sur $H(I)$.

- ② On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.

On pose :

$$K = \{f \in H(I), f(0) = 0\}.$$

- a** Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K .

Démontrer que :

$$\exists A > 0, \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A \|f\|_2.$$

- c** Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K .
- b** Démontrer que φ est continue de $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ dans $(K, \|\cdot\|_H)$.
- d** Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\cdot\|_H)$ dans $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$.

Partie VI

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodiques, muni de la norme :

$$\forall f \in E, \|f\|_E = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t) dt},$$

et F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. F est muni de la norme :

$$\forall f \in F, \|f\|_F = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t) dt + \int_0^{2\pi} f'^2(t) dt}.$$

- ① Démontrer que, pour tout f dans E , il existe une unique solution, notée $\psi(f)$, dans F , de l'équation :

$$y' + cy = f.$$

Exprimer $\psi(f)(0)$ en fonction de f et c .

Démontrer que ψ est un isomorphisme de E dans F .

- ② Pour tout f dans E et tout entier relatif k , on pose :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt \text{ et } d_k(f) = c_k(\psi(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(f)(t)e^{-ikt} dt$$

Exprimer $d_k(f)$ en fonction de $c_k(f)$.

- ③ Démontrer que, pour tout f dans E , la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et :

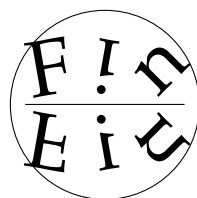
$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2.$$

Pour g dans F , calculer $\|g\|_F$ en fonction des $c_k(g)$.

Comparer $\|f\|_E$ et $\|\psi(f)\|_F$ pour f dans E . On pourra distinguer les cas $c \leq 1$ et $c > 1$.

- ④ Démontrer que ψ est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Démontrer que ψ^{-1} est continue de $(F, \|\cdot\|_F)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$.



À la prochaine