Mmi Former pour réussir

Devoir Libre

14 Valeur moyenne d'une fonction

Enoncé : CNC 2006, MP

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur** $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et } \forall\, x > 0,\ \psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda id_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

   1-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   Dans la suite, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$

   1-2. Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

   1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geqslant 1$, par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt.$

   1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

   1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geqslant 1$.

   1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geqslant 1$?

   1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a,b)$ en fonction de a et b.

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

   2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

   2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

   2-4. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

   1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E.

   1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.

   1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?

   1-4. On pose $h(x) = xf(x), \quad x \geqslant 0$.

   1-4-1. Montrer que $\quad g - \psi(g) = \psi(h)$.

   1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.

   1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leqslant \psi(\sqrt{f}) \leqslant \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

   2-2. Montrer que ψ est injectif.

   2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

   3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

   3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

   4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

   4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2, leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

   1-3. Montrer que l'application $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_2.

   Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(.|.)$ et $\|.\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}\, dt = -b\psi(f)^2(b) + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)\, dt. \qquad (1)$$

2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2. Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|.\|)$?

3. Soit f un élément de E_2.

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \longmapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax},\ x \geqslant 0$.

1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\dfrac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \geqslant 0$.

2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right) dt$.

2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \longmapsto \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

4-2. En déduire que $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ \ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

   5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_s(0) = 0,\ f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geqslant 1\ ,\ \text{et } f_s \text{ affine sur } [0,1].$$

   5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ vaut 2.

   5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = t^{\alpha} \quad \text{si } t \in [0,1],\ \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

   5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α.

   5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

   5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\ ;\ f \in E_2 \setminus \{0\}\right\}$ est nulle.

Á la prochaine